# Interrogation n° 5

## Exercice 1 *Questions de cours*

1. Compléter le tableau suivant

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | | | | |
| $\sin x$ | | | | | |

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, complétez les égalités suivantes :

$$\cos(a+b) = \dots\dots\dots\dots$$

$$\sin(a+b) = \dots\dots\dots\dots$$

3. Soit la fonction tangente $h : x \mapsto \tan(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de $h$.
   (b) Donner la parité de $h$.
   (c) Donner la périodicité de $h$.
   (d) Donner la dérivée de $h$.
   (e) Donner les variations de $h$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (f) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Soit la fonction arctangente définie par $u : x \mapsto \arctan(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de $u$.
   (b) Donner la dérivée de $u$.
   (c) Donner les variations de $u$.
   (d) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (e) Complétez les énoncés suivants :

$$\forall x \in \dots\dots, \quad \tan(\arctan(x)) = \dots.$$

$$\forall x \in \dots\dots, \quad \arctan(\tan(x)) = \dots.$$

## Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+1) + \ln(x+3) = 2\ln(x-1)$ sur $I = ]1, +\infty[$
2. $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{x^2} < \mathrm{e}^2$ sur $I = \mathbb{R}$


© M. Fontaine

# Corrigé : Interrogation n° 5

## Exercice 1 *Questions de cours*

1. Compléter le tableau suivant

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | | | | |
| $\sin x$ | | | | | |

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, complétez les égalités suivantes :

$$\cos(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Soit la fonction tangente $h : x \mapsto \tan(x)$.

(a) Donner le domaine de définition de $h$.

> $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

(b) Donner la parité de $h$.

> $g$ est une fonction impaire.

(c) Donner la périodicité de $h$.

> La fonction $h$ est $\pi$-périodique.

(d) Donner la dérivée de $h$.

> $g'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

(e) Donner les variations de $h$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

> $h$ est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(f) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

> Voir cours.

4. Soit la fonction arctangente définie par $u : x \mapsto \arctan(x)$.

   (a) Donner le domaine de définition de $u$.

   > $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$

   (b) Donner la dérivée de $u$.

   > $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   (c) Donner les variations de $u$.

   > $u$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

   (d) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   > Voir cours.

   (e) Complétez les énoncés suivants :

$$\forall x \in \ldots\ldots, \quad \tan(\arctan(x)) = \ldots.$$
$$\forall x \in \ldots\ldots, \quad \arctan(\tan(x)) = \ldots.$$

## Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+1) + \ln(x+3) = 2\ln(x-1)$ sur $I = ]1, +\infty[$

> Soit $x \in I$n on a :
>
> $$\ln(2x+1) + \ln(x+3) = 2\ln(x-1) \iff \ln((2x+1)(x+3)) = \ln((x-1)^2) \iff (2x+1)(x+3) = (x-1)^2$$
> $$\iff 2x^2 + 7x + 3 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + 9x + 2 = 0$$
>
> Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2, on a :
>
> $$\Delta = (9)^2 - 4 \times (2) = 81 - 8 = 73 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}$$
>
> On remarque que $x_1 < 0$ donc $x_1 \notin I$ et que $\sqrt{64} \leq \sqrt{73} \leq \sqrt{81}$ ainsi $\sqrt{73} > 8$ et donc $x_2 < 0$ également. Finalement $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. $e^{3x}e^{x^2} < e^2$ sur $I = \mathbb{R}$

> Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
>
> $$e^{3x}e^{x^2} < e^2 \iff e^{3x+x^2} < e^2 \iff 3x + x^2 < 2 \iff x^2 + 3x - 2 < 0.$$
>
> Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2, on a :
>
> $$\Delta = (3)^2 - 4 \times (-2) = 17 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$
>
> Finalement $\mathcal{S} = \left]\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right[$.

 **© M. Fontaine**