

Interrogation n° 3

Exercice 1 Questions de cours

1. Soient $\boxed{q \in \mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\sum_{k=0}^n q^k$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\sum_{k=0}^n k^2$?
3. Combien y a-t-il d'entiers dans les intervalles suivants ?
 - (a) $\llbracket 1; n \rrbracket$
 - (b) $\llbracket 0; n \rrbracket$
 - (c) $\llbracket m; n \rrbracket$ pour $m \leq n$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n (5k - 3)$
2. $\sum_{k=3}^{15} 8$

Corrigé : Interrogation n° 3

Exercice 1 Questions de cours

1. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\sum_{k=0}^n q^k$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\sum_{k=0}^n k^2$?
3. Combien y a-t-il d'entiers dans les intervalles suivants ?
 - (a) $\llbracket 1; n \rrbracket$
 - (b) $\llbracket 0; n \rrbracket$
 - (c) $\llbracket m; n \rrbracket$ pour $m \leq n$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = 2^n + n + 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - n \quad \text{par définition de la suite} \\ &= 2(2^n + n + 1) - n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1} + 2n + 2 - n \\ &= 2^{n+1} + n + 2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1 + 1$. Finalement $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + n + 1.$$

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n (5k - 3)$

On a, par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n 5k - 3 = 5 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 3 = 5 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n = n \left(\frac{5(n+1) - 6}{2} \right) = \frac{n(5n-1)}{2}.$$

2. $\sum_{k=3}^{15} 8$

$$\sum_{k=3}^{15} 8 = 8(15 - 3 + 1) = 104$$