Interrogation n° 3

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $\llbracket m;n \rrbracket$?
2. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $\boxed{q \in \mathbb{R}}$
3. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\displaystyle\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Enoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k-1)$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{2^k}$

Exercice 3

Développer (à l'aide du binôme de Newton) l'expression $(2+x)^4$.

Corrigé : Interrogation n° 3

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![m;n]\!]$?

> Il y a $n-m+1$ entiers dans cet intervalle.

2. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$

   > $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

   > $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $\boxed{q \in \mathbb{R}}$

   > Si $q \neq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

3. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\displaystyle\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Enoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k-1)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(5k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 5k + \sum_{k=0}^{n}(-1) \qquad \text{par linéarité de la somme} \\
&= 5\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= (n+1)\left(\frac{5n}{2}-1\right) \\
&= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}.
\end{aligned}
$$

2. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{2^k}$

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3\times 3^k}{2^k} \\
&= 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 3\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right) \\
&= 3\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 3\times\left(-\frac{2}{1}\right)\times\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= -6\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 3

Développer (à l'aide du binôme de Newton) l'expression $(2+x)^4$.

$$
\begin{aligned}
(2+x)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k\times(x)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0}2^0\times x^4 + \binom{4}{1}2^1\times x^3 + \binom{4}{2}2^2\times x^2 + \binom{4}{3}2^3\times x^1 + \binom{4}{4}2^4\times x^0 \\
&= x^4 + 4\times 2x^3 + 6\times 4x^2 + 4\times 8x + 16 \\
&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16
\end{aligned}
$$