Interrogation n° 3

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient $\boxed{q \in \mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$?
3. Combien y a-t-il d'entiers dans les intervalles suivants ?
   (a) $[\![1;n]\!]$
   (b) $[\![0;n]\!]$
   (c) $[\![m;n]\!]$ pour $m \leq n$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k-3)$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{15} 8$

Corrigé : Interrogation n° 3

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient $\boxed{q \in \mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$?
3. Combien y a-t-il d'entiers dans les intervalles suivants ?
   (a) $[\![1;n]\!]$
   (b) $[\![0;n]\!]$
   (c) $[\![m;n]\!]$ pour $m \leq n$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n + n + 1$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\quad u_n = 2^n + n + 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$. $\quad$ Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - n \quad \text{par définition de la suite} \\ &= 2(2^n + n + 1) - n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1} + 2n + 2 - n \\ &= 2^{n+1} + n + 2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1 + 1$. Finalement $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + n + 1.$$

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (5k - 3)$

On a, par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} 5k-3 = 5\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 = 5 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n = n\left(\frac{5(n+1)-6}{2}\right) = \frac{n(5n-1)}{2}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{15} 8$

$$\sum_{k=3}^{15} 8 = 8(15-3+1) = 104$$