

Interrogation n° 3

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[[m; n]]$?
2. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^n k$

(b) $\sum_{k=0}^n k^2$

(c) $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $q \in \mathbb{R}$

3. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^n (5k - 1)$

2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k+1}}{2^k}$

Exercice 3

Développer (à l'aide du binôme de Newton) l'expression $(2 + x)^4$.

Corrigé : Interrogation n° 3

Exercice 1 Questions de cours

1. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[[m; n]]$?
2. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^n k$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) $\sum_{k=0}^n k^2$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $q \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } q \neq 1, \text{ on a : } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ sinon } \sum_{k=0}^n q^k = n + 1.$$

3. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^n (5k - 1)$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n (5k - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^n 5k + \sum_{k=0}^n (-1) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= 5 \left(\sum_{k=0}^n k \right) - \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 5 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= (n+1) \left(\frac{5n}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$2. T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k+1}}{2^k}$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=0}^n \frac{3 \times 3^k}{2^k} \\
 &= 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2} \right)^k \\
 &= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &= 3 \times \left(-\frac{2}{1} \right) \times \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} \right) \\
 &= -6 \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Développer (à l'aide du binôme de Newton) l'expression $(2+x)^4$.

$$\begin{aligned}
 (2+x)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 2^k \times (x)^{4-k} \\
 &= \binom{4}{0} 2^0 \times x^4 + \binom{4}{1} 2^1 \times x^3 + \binom{4}{2} 2^2 \times x^2 + \binom{4}{3} 2^3 \times x^1 + \binom{4}{4} 2^4 \times x^0 \\
 &= x^4 + 4 \times 2x^3 + 6 \times 4x^2 + 6 \times 8x + 16 \\
 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16
 \end{aligned}$$