Interrogation n° 2

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Donner l'expression de son terme général.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$. Donner la valeur de S_n.
3. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n.

Exercice 3

Déterminer une expression de u_n en fonction de n, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

Corrigé : Interrogation n° 2

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Donner l'expression de son terme général.

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$. Donner la valeur de S_n.

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

3. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n.

On commence par chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1$. On résout cette équation de degré 1 et on obtient $\alpha = -2$.
On définit ensuite la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 2$. Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 2) - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2}v_n - 1 - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$. On a alors que pour tout

$n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 4 \times (\frac{1}{2})^n = \frac{4}{2^n}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{4}{2^n} - 2.$$

Exercice 3

Déterminer une expression de u_n en fonction de n, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; , \; u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

- On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 3r + 4 \iff r^2 - 3r - 4 = 0$.
  On trouve $\Delta = 25 = 5^2 > 0$ donc (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ et } r_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

  On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 4^n$.
  En particulier, pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et pour $n = 1$, on a $u_1 = 2 = -\lambda + 4\mu$ donc λ et μ vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda & + & \mu & = & 1 & \quad L_1 \\ -\lambda & + & 4\mu & = & 2 & \quad L_2 \end{cases}$$

  $L_1 + L_2$ donne $5\mu = 3$ donc $\mu = \frac{3}{5}$ puis L_1 donne $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{3}{5} \times 4^n.}$