Interrogation n° 2

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$. Donner la valeur de S_n.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Donner l'expression de son terme général.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Corrigé : Interrogation n° 2

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$. Donner la valeur de S_n.

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Donner l'expression de son terme général.

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

On commence par chercher le réel α vérifiant
$$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}.$$
On obtient $\alpha = -1$.
On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(v_n - 1) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}v_n.$$
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$
Comme $u_n = v_n - 1$, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1.$$

Exercice 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?

> Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

> On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est la suivante : $r^2 = 4r - 4$. Ce qui équivaut à $(r-2)^2 = 0$. Ainsi elle possède une unique racine double $r_0 = 2$. Il existe donc λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + n\mu)2^n$.
> Déterminons λ et μ. On a :
> $$u_0 = 1 = \lambda \quad \text{et} \quad u_1 = 0 = (\lambda + \mu)2$$
> Ainsi $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = (1-n)2^n}$.