Interrogation n° 29

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
   (b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$
   (c) $x \mapsto \ln(1+x)$
   (d) $x \mapsto (1+x)^\alpha$
   (e) $x \mapsto \sin(x)$
   (f) $x \mapsto \cos(x)$
2. Enoncer la formule de Taylor-Young

Exercice 2

Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{2}{2-7x}$
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}$

Exercice 3

Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Corrigé : Interrogation n° 29

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

   (b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

   (c) $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

   (d) $x \mapsto (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\frac{x^4}{4!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

   (e) $x \mapsto \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

   (f) $x \mapsto \cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

2. Enoncer la formule de Taylor-Young

Exercice 2

Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{2}{2-7x}$

> On commence par remarquer que :
> $$\frac{2}{2-7x} = \frac{2}{2(1-\frac{7x}{2})} = \frac{1}{1-\frac{7x}{2}},$$
> or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x}{2} = 0$, ainsi on a :
> $$\frac{2}{2-7x} \underset{0}{=} 1 + \frac{7x}{2} + \left(\frac{7x}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x}{2}\right)^3 + o(x^3) = 1 + \frac{7x}{2} + \frac{49x^2}{4} + \frac{343x^3}{8} + o(x^3).$$

2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-x}$

> Commençons par remarquer que :
> $$\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-x} = \mathrm{e}^{-3x} \times \frac{1}{1-x}$$
> puis comme $\lim\limits_{x\to 0} -3x = 0$, on peut écrire que :
> $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-x} &\underset{+\infty}{=} \left(1 - 3x + \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) \\ &= \left(1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 - 3x - 3x^2 - 3x^3 + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} - \frac{9x^3}{2} + o(x^3) \\ &= 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}$

> Commençons par remarquer que :
> $$\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x} = \frac{1}{x} \times \left((1-2x)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$
> puis comme $\lim\limits_{x\to 0} -2x = 0$, on peut écrire que :
> $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x} &= \frac{1}{x} \times \left(1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{(-2x)^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\frac{(-2x)^3}{3!} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\frac{(-2x)^4}{4!} + o(\right. \\ &= \frac{1}{x} \times \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8} + o(x^4) - 1\right) \\ &= -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{8} + o(x^3)\end{aligned}$$

Exercice 3

Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

> Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut écrire que :
> $$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3n^3}$. Or $-\dfrac{1}{3n^3}$ est un terme général d'une série de Riemann convergente car $3 > 1$. Comme $-\dfrac{1}{3n^3} < 0$, on en déduit que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang et que donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge d'après le critère de convergence par équivalent.