Interrogation n° 28

Exercice 1

Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x - 4y + 3z, x, -y + 2z) \end{cases}$$

$$2. f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ P \mapsto P(x+1) - P'(x) \end{cases}$$

Exercice 2

1. On considère la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner son application linéaire canoniquement associée.

2. On considère la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Donner son application linéaire canoniquement associée. Quel est le rang de cette application linéaire ?

Corrigé : Interrogation n° 28

Exercice 1

Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x - 4y + 3z, x, -y + 2z) \end{cases}$$

La matrice canoniquement associée à f est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

$$2. f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ P \mapsto P(x+1) - P'(x) \end{cases}$$

La base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est $(1, x, x^2, x^3)$. On a :

$$f(1) = 1 - 0 = 1, \quad f(x) = x + 1 - 1 = x \quad f(x^2) = (x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$$

$$f(x^3) = (x+1)^3 - 3x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 = x^3 + 3x + 1$$

Ainsi la matrice canoniquement associée à f est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 2

$$1. \text{ On considère la matrice } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donner son application linéaire canoniquement associée.}$$

L'application linéaire canoniquement associée est ;

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 4y + 3z \\ 2x + y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$2. \text{ On considère la matrice } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Donner son application linéaire canoniquement associée. Quel est le rang de cette application linéaire ?}$$

L'application linéaire canoniquement associée est ;

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 2x - 2y \\ 2y - 2x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les deux colonnes de la matrice représentative de f sont liées et la première colonne est non nulle donc $\text{rg}(f) = 1$.