Interrogation n° 27

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer le Lemme des coalitions.
2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et admettant une espérance, combien vaut $E(XY)$?

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise.
On note X_1 le numéro de la première boule tirée, X_2 le numéro de la deuxième boule tirée, et $M = \max(X_1, X_2)$ le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, M).
   (b) En déduire la loi de M.
   (c) Peut-on retrouver la loi de X_1 à partir de la loi du couple (X_1, M) ? Si oui, la déterminer.
3. Les variables aléatoires X_1 et M sont-elles indépendantes ?

Corrigé : Interrogation n° 27

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer le Lemme des coalitions.
2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et admettant une espérance, combien vaut $E(XY)$?

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise.
On note X_1 le numéro de la première boule tirée, X_2 le numéro de la deuxième boule tirée, et $M = \max(X_1, X_2)$ le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

> Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et uniformes sur $\{1,2,3,4,5\}$.
> Ainsi, pour tout $(i,j) \in \{1,2,3,4,5\}^2$,
> $$P(X_1 = i, X_2 = j) = \ P(X_1 = i)P(X_2 = j) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, M).

> Pour déterminer la loi du couple (X_1, M), rappelons que
> $$M = \max(X_1, X_2).$$
> Soient $i, m \in \{1,2,3,4,5\}$.
> — Si $m < i$, alors
> $$P(X_1 = i, M = m) = 0.$$
> — Si $m = i$, alors il faut avoir $X_2 \leq i$, d'où
> $$P(X_1 = i, M = i) = \sum_{j=1}^{i} P(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{i}{25}.$$
> — Si $m > i$, alors nécessairement $X_2 = m$, d'où
> $$P(X_1 = i, M = m) = P(X_1 = i, X_2 = m) = \frac{1}{25}.$$
> On obtient donc le tableau suivant :

	$M=1$	$M=2$	$M=3$	$M=4$	$M=5$
$X_1 = 1$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$X_1 = 2$	0	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$X_1 = 3$	0	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$X_1 = 4$	0	0	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$
$X_1 = 5$	0	0	0	0	$\frac{5}{25}$

(b) En déduire la loi de M.

> Pour tout $m \in \{1,2,3,4,5\}$,
> $$P(M=m) = \sum_{i=1}^{5} P(X_1 = i, M = m).$$
> On peut aussi utiliser
> $$P(M \leq m) = P(X_1 \leq m, X_2 \leq m) = \left(\frac{m}{5}\right)^2.$$
> Ainsi,
> $$P(M=m) = P(M \leq m) - P(M \leq m-1) = \frac{m^2-(m-1)^2}{25} = \frac{2m-1}{25}.$$
> Donc
>
> | m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $P(M=m)$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{5}{25}$ | $\frac{7}{25}$ | $\frac{9}{25}$ |

(c) Peut-on retrouver la loi de X_1 à partir de la loi du couple (X_1, M) ? Si oui, la déterminer.

> Oui. Il suffit de sommer les probabilités sur toutes les valeurs possibles de M :
> $$P(X_1 = i) = \sum_{m=1}^{5} P(X_1 = i, M = m).$$
> Pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$,
> $$P(X_1 = i) = \frac{i}{25} + \frac{5-i}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$
> On retrouve bien la loi uniforme de X_1 :
> $$P(X_1 = i) = \frac{1}{5}, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

3. Les variables aléatoires X_1 et M sont-elles indépendantes ?

> Les variables aléatoires X_1 et M ne sont pas indépendantes car $P(X_1 = 2, M = 1) = 0$ et $P(X_1 = 2)P(M = 1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} \neq 0$.