Interrogation n° 27

Exercice 1 *Questions de cours*

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^x$
3. $x \mapsto \ln(1+x)$
4. $x \mapsto (1+x)^\alpha$
5. $x \mapsto \sin(x)$
6. $x \mapsto \cos(x)$

Exercice 2

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{1+3x}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

Exercice 3

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$$

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. (Aucune justification n'est attendue).
2. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.
3. A l'aide de la relation ci-dessus, montrer que f est un isomorphisme et déterminer sa bijection réciproque.

Corrigé : Interrogation n° 27

Exercice 1 *Questions de cours*

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

2. $x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

3. $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

4. $x \mapsto (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\frac{x^4}{4!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

5. $x \mapsto \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

6. $x \mapsto \cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

Exercice 2

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{1+3x}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+3x} &\underset{0}{=} (1+3x)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \lim_{x\to 0} 3x = 0 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\times 3x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{(3x)^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} - \frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{9x^3}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} + \frac{27x^3}{16} + o(x^3)
\end{aligned}$$

2. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{0}{=} \ln(1+x)\times\frac{1}{1+x} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\times\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \\
&= x - x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$$

Calculons un développement limité à l'ordre 3 du numérateur pour en trouver un équivalent, on a, au voisinage de 0 :

$$\sin(x) - x\cos(x) = x - \frac{x^3}{3!} - x\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ainsi au voisinage de 0 :

$$\sin(x) - x\cos(x) \sim \frac{x^3}{3}$$

De plus, au voisinage de 0 : $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ donc

$$x(1-\cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$$

Par quotient, on a :

$$\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \frac{2}{3}$.

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. (Aucune justification n'est attendue).

> La matrice A vaut : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.

> On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule alors $3A - 2I_3$ et on obtient l'égalité voulue.

3. A l'aide de la relation ci-dessus, montrer que f est un isomorphisme et déterminer sa bijection réciproque.

> A l'aide de la relation précédente, nous pouvons montrer que la matrice A est inversible. En effet,
>
> $$A^2 = 3A - 2I_3 \iff A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A \times \frac{-1}{2}(A - 3I_3) = I_3$$
>
> Ainsi la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3) = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> On en déduit donc que l'endomorphisme f est bijectif et que sa bijection réciproque vaut $f^{-1} = -\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}I_d$. Soit l'expression suivante :
>
> $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y + z \\ -x + 3y - z \\ -x + y + z \end{pmatrix}.$$