Interrogation n° 26

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction f, à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
   (b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$
   (c) $x \mapsto \ln(1+x)$

Exercice 2

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de le fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \quad f(P(x)) = P(x) + xP'(x) - x^2P''(x).$$

1. On note $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On la notera A.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
3. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Corrigé : Interrogation n° 26

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction f, à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

   (b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

   (c) $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Exercice 2

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de le fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{0}{=} \ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \\
&= x - x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \quad f(P(x)) = P(x) + xP'(x) - x^2P''(x).$$

1. On note $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On la notera A.

On a :
- $f(1) = x \times 0 - x^2 \times 0 + 1$
- $f(x) = x \times 1 - x^2 \times x + x = 2x$
- $f(x) = x \times 2x - x^2 \times 2 + x^2 = x^2$
- $f(x) = x \times 3x^2 - x^2 \times 6x + x^3 = -2x^3$

On a donc :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

La matrice A est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible. Son inverse vaut :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Comme la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est inversible, on en déduit que f est bijective. Sa bijection réciproque a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

