Interrogation n° 26

Exercice 1

Justifier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\cos(t)\sqrt{t}}{t} dt$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{3x}} dx$

3. $\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u^2} du$

Exercice 2

1. Etudier la convergence, et en cas de convergence, calculer la valeur de intégrale :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+3)^2} dt$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, étudier la convergence, et en cas de convergence, calculer la valeur de l'intégrale :

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

Corrigé : Interrogation n° 26

Exercice 1

Justifier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\cos(t)\sqrt{t}}{t} dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)\sqrt{t}}{t}$ est continue et positive sur $]0, 1]$, l'intégrale est donc impropre en 0. On a :

$$\frac{\cos(t)\sqrt{t}}{t} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ converge car on reconnaît une intégrale de Riemann et $\frac{1}{2} < 1$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(t)\sqrt{t}}{t} dt$ est donc convergente.

2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{3x}} dx$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^{3x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{e^{2x}}{1+e^{3x}} \sim \frac{e^{2x}}{e^{3x}}$$

Or $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{-x}$ donc

$$\frac{e^{2x}}{1+e^{3x}} \sim e^{-x}$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente car $1 > 0$. Donc d'après le critère par équivalence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{3x}} dx$ est convergente.

3. $\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u^2} du$

La fonction $u \mapsto u^3 e^{-u^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

On a au voisinage de $+\infty$: $u^3 e^{-u^2} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$. En effet,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 e^{-u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^5 e^{-u^2}$$

Par croissance comparée $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^5 e^{-u^2} = 0$.

De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ est convergente car on reconnaît une intégrale de Riemann avec $3 > 1$. Ainsi par critère de négligeabilité, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u^2} du$ est convergente.

Exercice 2

1. Etudier la convergence, et en cas de convergence, calculer la valeur de intégrale :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+3)^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(2t+3)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $M > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{1}{(2t+3)^2} dt &= \left[\frac{-1}{2(2t+3)} \right]_0^M \\ &= \frac{-1}{2(2M+3)} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Or $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2(2M+3)} = 0$ donc l'intégrale I_1 converge et vaut $\frac{1}{6}$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, étudier la convergence, et en cas de convergence, calculer la valeur de l'intégrale :

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $M > 1$, Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. On a alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{\ln(t)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^M - \int_1^M \frac{1}{t} \times \frac{-1}{t} dt \\ &= -\frac{\ln(M)}{M} + \int_1^M \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln(M)}{M} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^M \\ &= -\frac{\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \end{aligned}$$

Or $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\ln(M)}{M} = 0$ par croissance comparée et $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} = 0$. Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge et vaut 1.