Interrogation n° 26

Exercice 1 *Questions de cours*

1. (a) Quel est le nom de ces intégrales ? Sous quelle condition convergent-elles ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

   (b) Sous quelle condition converge l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

2. Compléter le tableau suivant :

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$				

3. Donner les équivalents au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   (a) $\ln(1+x)$
   (b) $\mathrm{e}^x - 1$
   (c) $(1+x)^\alpha - 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$
   (d) $\sin(x)$
   (e) $1 - \cos(x)$
   (f) $\tan(x)$
4. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la définition de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
5. Enoncer le théorème du rang.
6. (a) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$?
   (b) Donner sa base canonique ?
7. Enoncer la formule du crible Poincaré qui permet de calculer $P(A \cup B \cup C)$ où A, B et C sont des événements.
8. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -2$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de n
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ en fonction de n.
9. Soit E un espace vectoriel et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, sous quelle condition peut-on développer l'expression $(f+g)^n$? Quand cette condition est vérifiée, quelle est l'expression de $(f+g)^n$?

Exercice 2

Justifier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)(\sin(t))^2\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x^3+3x^2+9x+1)^2}\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^3 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x$

Exercice 4

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :
   (a) $\exp\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)-1$
   (b) $\dfrac{x^3-\ln(x)}{\frac{1}{x}-5x^3}$
2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   (a) $\tan(x)-\sin(x)$
   (b) $\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 5

On considère l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x+y+z=0 \text{ et } x-2z=0 \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 6

Après avoir démontré sa convergence, calculer la somme de cette série : $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{3^n}$.

Exercice 7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

1. Mme Fontaine travaille aux lycées Charles de Gaulle et Malherbe et possède donc 2 badges d'entrée (un pour chaque lycée). Les deux badges sont identiques. En arrivant devant le lycée, elle ne sait jamais quel badge est le bon et choisit au hasard. On note X la variable aléatoire égale à 1 si elle trouve le bon badge du premier coup et égale à 0 sinon.
2. Ma fille a découvert, cette année, le concept de 1er avril et a donc passé son samedi à faire des blagues. Une étude statistique a montré qu'environ un tiers des blagues des enfants de 4 ans sont effectivement drôles. Elle a fait environ 70 blagues dans la journée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de blagues qu'elle a faites et qui ont fait rire ses parents.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0.5 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

Montrer que f est continue en 0.

Exercice 10

1. Simplifier les écritures suivantes :
   (a) $A = \dfrac{(\mathrm{e}^{x+2})^2}{\mathrm{e}^{2x-1}}$
   (b) $B = \ln(\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{2-x})$
   (c) $C = \ln(x) \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. Résoudre sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ l'inéquation : $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

Corrigé : Interrogation n° 26

Exercice 1 *Questions de cours*

1. (a) Quel est le nom de ces intégrales ? Sous quelle condition convergent-elles ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

   (b) Sous quelle condition converge l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

2. Compléter le tableau suivant :

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$	$[\![1; n]\!]$	$P(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$\{0; 1\}$	$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$[\![0; n]\!]$	$P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

3. Donner les équivalents au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   (a) $\ln(1 + x)$
   (b) $\mathrm{e}^x - 1$
   (c) $(1 + x)^\alpha - 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$
   (d) $\sin(x)$
   (e) $1 - \cos(x)$
   (f) $\tan(x)$

(a) $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$
(b) $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
(c) $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$
(d) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
(e) $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

(f) $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$

4. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

On a :
$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = \{y \in F \,|\, \exists x \in E,\, y = f(x)\}$$

5. Enoncer le théorème du rang.

Soit E et F des espaces vectoriels tels que E est de dimension finie, soit $f : E \to F$ une application linéaire alors
$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

6. (a) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$?

$\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$.

(b) Donner sa base canonique ?

Sa base canonique est la famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

7. Enoncer la formule du crible Poincaré qui permet de calculer $P(A \cup B \cup C)$ où A, B et C sont des événements.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

8. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = -2 \times 5^{n-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = u_2 \times \frac{1-5^{n-1}}{1-5} = -10 \times \frac{1-5^{n-1}}{-4} = \frac{5}{2}(1-5^{n-1})$.

9. Soit E un espace vectoriel et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, sous quelle condition peut-on développer l'expression $(f+g)^n$? Quand cette condition est vérifiée, quelle est l'expression de $(f+g)^n$?

Il faut que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$, on a alors :
$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Exercice 2

Justifier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t} \mathrm{d}t$

> La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale est donc impropre en 0. On a :
>
> $$\frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$
>
> Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t$ converge car on reconnaît une intégrale de Riemann et $\frac{1}{2} < 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t}\mathrm{d}t$ est donc convergente.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x$

> La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a au voisinage de $+\infty$:
>
> $$\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}} \sim \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}}$$
>
> Or $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}} = \mathrm{e}^{-x}$ donc
>
> $$\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}} \sim \mathrm{e}^{-x}$$
>
> Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ est convergente car $1 > 0$. Donc d'après le critère par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x$ est convergente.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$

> La fonction $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
> On a au voisinage de $+\infty$: $u\mathrm{e}^{-u^2} = o(\frac{1}{u^3})$. En effet,
>
> $$\lim_{u\to+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{\frac{1}{u^3}} = \lim_{u\to+\infty} u^4\mathrm{e}^{-u^2} = \lim_{u\to+\infty} (u^2)^2\mathrm{e}^{-u^2}$$
>
> Or $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^2\mathrm{e}^{-X} = 0$ par croissance comparée donc par composée de limites $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} (u^2)^2\mathrm{e}^{-u^2} = 0$.
> De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}\mathrm{d}u$ est convergente car on reconnaît une intégrale de Riemann avec $3 > 1$. Ainsi par critère de négligeabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ est convergente.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)(\sin(t))^2\mathrm{d}t$

> f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(t) = \sin(t)$ et $\alpha = 2$. On a alors $u'(t) = \cos(t)$ et donc :
>
> $$u'u^\alpha = \cos(t)(\sin(t))^2 = f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\frac{1}{2+1}\left(\sin(t)\right)^{2+1}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \left[\frac{1}{3}\left(\sin(t)\right)^{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{3})^3 - \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{6})^3 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{3\sqrt{3}-1}{24}
\end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x^3+3x^2+9x+1)^2}\mathrm{d}x$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^3+3x^2+9x+1$. On a alors $u'(x) = 3x^2+6x+9$ et donc :

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{3x^2+6x+9}{(x^3+3x^2+9x+1)^2} = 3f(x).$$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u^2}$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left[\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{x^3+3x^2+9x+1}\right)\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{3}\times\frac{1}{1^3+3\times(1)^2+9\times 1+1} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{1} \\
&= -\frac{1}{3\times 14} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{-1+14}{42} = \frac{13}{42}.
\end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$

Remarquons que $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ est donc donnée par $t \mapsto \frac{1}{1+\frac{1}{2}}t^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3}\times(2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} - \left(\frac{2}{3}\times(1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times(2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{4-2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^3 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x$

Commençons par étudier le signe du polynôme x^2-3x+2. Ses racines sont 1 et 2. Donc $x^2-3x+2<0$ pour $x\in]1,2[$ et $x^2-3x+2\geq 0$ sinon. On a alors d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x + \int_1^2 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x + \int_2^3 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^2-3x+2\mathrm{d}x - \int_1^2 x^2-3x+2\mathrm{d}x + \int_2^3 x^2-3x+2\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3\\
&= \frac{1^3}{3}-\frac{3\times 1^2}{2}+2-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\times 2^2}{2}+2\times 2\right)+\frac{1^3}{3}-\frac{3\times 1^2}{2}+2+\frac{3^3}{3}-\frac{3\times 3^2}{2}+2\times 3-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\times 2^2}{2}+2\times 2\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-2\left(\frac{8}{3}-6+4\right)+9-\frac{27}{2}+6\\
&= \frac{5}{3}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{3}{2}\\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

   (a) $\exp\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)-1$

   On a : $\dfrac{x+1}{x^2-2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{x^2}$ car au voisinage de $+\infty$, $1=o(x)$ et $-2=o(x^2)$. Ainsi $\dfrac{x+1}{x^2-2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2}=0$. On peut donc dire que :

   $$\exp\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{x+1}{x^2-2}\sim\frac{1}{x}.$$

   (b) $\dfrac{x^3-\ln(x)}{\frac{1}{x}-5x^3}$

   On a : $x^3-\ln(x)\underset{+\infty}{\sim}x^3$ car au voisinage de $+\infty$, $\ln(x)=o(x^3)$.

   On a : $\frac{1}{x}-5x^3\underset{+\infty}{\sim}-5x^3$ car au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{x}=o(-5x^3)$, en effet $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-5x^4}=0$.
   Ainsi :

   $$\frac{x^3-\ln(x)}{\frac{1}{x}-5x^3}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x^3}{-5x^3}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{5}.$$

2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

   (a) $\tan(x)-\sin(x)$

   On a pour :

   $$\tan(x)-\sin(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)=\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)}.$$

Or $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $(1-\cos(x)) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, et $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi :

$$\tan(x)-\sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{x \times \frac{x^2}{2}}{1} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

(b) $\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

Première méthode :

On a : $\ln(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Or au voisinage de 0, $\ln(1+x^2) \sim x^2$ donc $\ln(\sqrt{1+x^2}) \sim \frac{x^2}{2}$.

Deuxième méthode : Beaucoup moins simple

On a :

$$\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(1+(\sqrt{1+x^2}-1)\right)$$

Or $\sqrt{1+x^2}-1 = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x^2}-1 = 0$, on peut donc écrire :

$$\ln\left(1+(\sqrt{1+x^2}-1)\right) \underset{0}{\sim} (\sqrt{1+x^2}-1) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 5

On considère l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x+y+z=0 \text{ et } x-2z=0 \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

On a :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y=-x-z \text{ et } x=2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y=-3z \text{ et } x=2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad z\in\mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi E est l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est donc bien un espace vectoriel. Pour déterminer sa dimension, exhibons une base de cet espace.

Comme E est l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de E, de plus elle est composée d'un unique vecteur non nul donc elle est libre. C'est donc une base de E et on peut affirmer que E est de dimension 1.

Exercice 6

Après avoir démontré sa convergence, calculer la somme de cette série : $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{3^n}$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k^2}{3^k}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=3}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} - 2(2-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} - \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles des séries géométriques dérivées première et seconde de raison $\frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3} \in]-1,1[$, ces deux sommes partielles convergent donc (S_n) converge. La série $\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{3^n}$ est donc convergente et on a :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} - \frac{7}{9} = \frac{13}{18}.$$

Exercice 7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.

> On calcule les produits matriciels et on obtient : $A^3 - A = 4I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

> On a :
> $$A^3 - A = 4I_3 \iff A(A^2 - I_3) = 4I_3 \iff A \times \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = I_3$$
> On en déduit donc que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$ soit
> $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

1. Mme Fontaine travaille aux lycées Charles de Gaulle et Malherbe et possède donc 2 badges d'entrée (un pour chaque lycée). Les deux badges sont identiques. En arrivant devant le lycée, elle ne sait jamais quel badge est le bon et choisit au hasard. On note X la variable aléatoire égale à 1 si elle trouve le bon badge du premier coup et égale à 0 sinon.

> X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité $\frac{1}{2}$) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

2. Ma fille a découvert, cette année, le concept de 1er avril et a donc passé son samedi à faire des blagues. Une étude statistique

a montré qu'environ un tiers des blagues des enfants de 4 ans sont effectivement drôles. Elle a fait environ 70 blagues dans la journée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de blagues qu'elle a faites et qui ont fait rire ses parents.

> On note succès " la blague a effectivement faire rire les parents ", selon l'énoncé le succès est de probabilité $\frac{1}{3}$. Ma fille a fait 70 blagues et a donc répété 70 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = \frac{1}{3}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0.5 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

Montrer que f est continue en 0.

> Au voisinage de 0, $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ donc $f(x) \sim \frac{1}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(0)$, la fonction f est donc continue en 0.

Exercice 10

1. Simplifier les écritures suivantes :
   (a) $A = \dfrac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}$

   > $$A = \frac{e^{2x+4}}{e^{2x-1}} = e^{2x+4-2x+1} = e^5.$$

   (b) $B = \ln(e^{2x+1} \times e^{2-x})$

   > $$B = \ln\left(e^{2x+1+2-x}\right) = x + 3.$$

   (c) $C = \ln(x)\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   > $$C = \ln(x)(-\ln(x)) = -\ln(x)^2.$$

2. Résoudre sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ l'inéquation : $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0.$

   > Soit $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, on a :
   >
   > $$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0 \iff \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq \ln(1) \iff \frac{2x+1}{x+1} \leq 1 \iff \frac{2x+1}{x+1} - 1 \leq 0 \iff \frac{x}{x+1} \leq 0$$
   >
   > Pour tout $x \in\in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $x + 1 > 0$, le signe du quotient dépend donc du signe de x, on a donc : $\mathscr{S} =]-\frac{1}{2}, 0]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2e^{2x} - e^x - 1 = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$, remarquons que l'équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$2(\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x - 1 = 0.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$, on a alors :

$$2X^2 - X - 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut : 9 et elle possède donc deux racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Il nous reste alors à résoudre les deux équations suivantes :

$$\mathrm{e}^x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1.$$

Comme $-\frac{1}{2} < 0$, la première équation n'a pas de solution. La deuxième possède une unique solution valant $\ln(1) = 0$. Ainsi $\mathscr{S} = \{0\}$.