Interrogation n° 25

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soit E un espace vectoriel et soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Comment définit-on la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?
2. Soient E, F, G des espaces vectoriels dont on note $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ les bases respectives. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. Que vaut la matrice de l'application linéaire $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$?

Exercice 2

Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

1. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, -2x + 3z) \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ P \mapsto P(x+1) - P'(x) \end{array} \right.$

Exercice 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice M est la matrice représentative dans les bases canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Corrigé : Interrogation n° 25

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soit E un espace vectoriel et soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Comment définit-on la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?
2. Soient E, F, G des espaces vectoriels dont on note $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ les bases respectives. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. Que vaut la matrice de l'application linéaire $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$?

Exercice 2

Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (2x - y + z, -2x + 3z) \end{cases}$

La matrice canoniquement associée à f est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ P \mapsto P(x+1) - P'(x) \end{cases}$

La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $(1, x, x^2)$. On a :

$$f(1) = 1 - 0 = 1, \quad f(x) = x + 1 - 1 = x \quad f(x^2) = (x+1)^2 - 2x = x^2 + 1.$$

Ainsi la matrice canoniquement associée à f est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice M est la matrice représentative dans les bases canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (x + 2y, 3x + 4y, 5x + 6y)$.