Interrogation n° 25

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Quel est le nom de ces intégrales ? Sous quelle condition convergent-elles ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

2. Sous quelle condition converge l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :
   (a) $\exp\left(\dfrac{x+1}{x^2-2}\right) - 1$
   (b) $\dfrac{x^3 - \ln(x)}{\frac{1}{x} - 5x^3}$
2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   (a) $\tan(x) - \sin(x)$
   (b) $\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

Corrigé : Interrogation n° 25

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Quel est le nom de ces intégrales ? Sous quelle condition convergent-elles ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

2. Sous quelle condition converge l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

(a) $\exp\left(\dfrac{x+1}{x^2-2}\right) - 1$

> On a : $\dfrac{x+1}{x^2-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2}$ car au voisinage de $+\infty$, $1 = o(x)$ et $-2 = o(x^2)$. Ainsi $\dfrac{x+1}{x^2-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2} = 0$. On peut donc dire que :
>
> $$\exp\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x+1}{x^2-2} \sim \frac{1}{x}.$$

(b) $\dfrac{x^3 - \ln(x)}{\frac{1}{x} - 5x^3}$

> On a : $x^3 - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3$ car au voisinage de $+\infty$, $\ln(x) = o(x^3)$.
>
> On a : $\dfrac{1}{x} - 5x^3 \underset{+\infty}{\sim} -5x^3$ car au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{x} = o(-5x^3)$, en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{-5x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-5x^4} = 0$.
> Ainsi :
>
> $$\frac{x^3 - \ln(x)}{\frac{1}{x} - 5x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{-5x^3} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{5}.$$

2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

(a) $\tan(x) - \sin(x)$

> On a pour :
>
> $$\tan(x) - \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x) = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)}.$$

Or $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $(1-\cos(x)) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, et $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi :

$$\tan(x) - \sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{x \times \frac{x^2}{2}}{1} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

(b) $\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

Première méthode :

On a : $\ln(\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Or au voisinage de 0, $\ln(1+x^2) \sim x^2$ donc $\ln(\sqrt{1+x^2}) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Deuxième méthode : Beaucoup moins simple

On a :

$$\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(1 + (\sqrt{1+x^2} - 1)\right)$$

Or $\sqrt{1+x^2} - 1 = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} - 1 = 0$, on peut donc écrire :

$$\ln\left(1 + (\sqrt{1+x^2} - 1)\right) \underset{0}{\sim} (\sqrt{1+x^2} - 1) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$