Interrogation n° 25

Exercice 1

On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 2. On note A l'événement « on effectue un nombre fini de lancers ». Autrement dit, A est l'événement « on obtient au moins un 2 ». On souhaite calculer $P(A)$. Pour cela, on considère les événements A_n « on obtient 2 pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Comment écrire A à l'aide des événements A_n ?
2. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.
3. Pour tout $n \geq 1$, calculer $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ en fonction de n.
4. En déduire $P(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

Exercice 2

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes.
   (a) $x^2 - \ln(x) + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
   (b) $\mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1$
2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes.
   (a) $\cos(x) - \dfrac{1}{\tan(x)}$
   (b) $\dfrac{x^3 - 2\ln(x)}{3^x - 2}$
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction
$$f(x) = \frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Corrigé : Interrogation n° 25

Exercice 1

On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 2. On note A l'événement « on effectue un nombre fini de lancers ». Autrement dit, A est l'événement « on obtient au moins un 2 ». On souhaite calculer $P(A)$. Pour cela, on considère les événements A_n « on obtient 2 pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Comment écrire A à l'aide des événements A_n ?

> L'évènement A est réalisé, si et seulement si, il existe un tirage n où on fait 2, c'est à dire, si il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n est réalisé. Autrement dit,
> $$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \,.$$

2. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.

> A_n est réalisé si on a obtenu un nombre autre que 2 aux $n-1$ premiers lancers et un 2 au n-ième lancer. Les lancers étant indépendants, on obtient :
> $$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}\,.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, calculer $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ en fonction de n.

> Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, donc :
> $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\,.$$
> On est donc ramené au calcul d'une somme géométrique. Dès lors :
> $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\,.$$

4. En déduire $P(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

> D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, et avec les résultats des questions précédentes, on a :
> $$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 \qquad \text{car } \frac{5}{6} \in]-1;1[.$$
> L'événement A est donc presque-sûr.

Exercice 2

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes.

(a) $x^2 - \ln(x) + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

> $-\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\frac{1}{\mathrm{e}^x} \underset{+\infty}{=} o(x^2)$. Ainsi
> $$x^2 - \ln(x) + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \underset{+\infty}{\sim} x^2.$$

(b) $\mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1$

> On a pour commencer $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^3}$ car $-x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $-1 \underset{+\infty}{=} o(2x^3)$. En simplifiant, $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x^3-1} = 0$. On a donc :
> $$\mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes.

(a) $\cos(x) - \dfrac{1}{\tan(x)}$

> On a :
> $$\cos(x) - \frac{1}{\tan(x)} = \cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cos(x)\left(1 - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \cos(x)\left(\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)}\right) = \frac{\sin(x)-1}{\tan(x)}.$$
> Or $\sin(x) - 1 \underset{0}{\sim} -1$ car $\displaystyle\lim_{x\to0} \sin(x) = 0$.
> On a également $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc
> $$\cos(x) - \frac{1}{\tan(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

(b) $\dfrac{x^3 - 2\ln(x)}{3^x - 2}$

> $x^3 - 2\ln(x) \underset{0}{\sim} -2\ln(x)$ car $x^3 \underset{0}{=} o(-2\ln(x))$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to0} 3^x - 2 = -1$ donc $3^x - 2 \underset{0}{\sim} -1$. On en déduit :
> $$\frac{x^3 - 2\ln(x)}{3^x - 2} \underset{0}{\sim} \frac{-2\ln(x)}{-1} \underset{0}{\sim} 2\ln(x).$$

3. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction
$$f(x) = \frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

> $x\mathrm{e}^x - x^2 \underset{+\infty}{\sim} x\mathrm{e}^x$ car $-x^2 \underset{+\infty}{=} (x\mathrm{e}^x)$. Donc $\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x\mathrm{e}^x}$.
> D'autre part : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que donc $\mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$. Ainsi :
> $$\frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x} = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{e}^x}}.$$
> On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée donc par composée de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{\mathrm{e}^x}} = 0$.
> Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = 0$.

