

## Corrigé : Interrogation n° 24

### Exercice 1      Questions de cours

1. Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_2 = -4$ . Donner l'expression de  $\sum_{k=2}^n u_k$ .
2. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , sous quelle condition la matrice  $A$  est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
3. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Donner la définition de  $f$  est continue en  $a$ .
  - (b) Donner la définition de  $f$  est dérivable en  $a$ .
4. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces et une application  $f : E \rightarrow F$ .
  - (a) Donner la définition de  $f$  est bijective.
  - (b) Si on suppose que  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels de même dimension et que  $f$  est une application linéaire. Quelle(s) caractérisation(s) a-t-on pour montrer que  $f$  est bijective ?
5. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.
  - (a) Donner la définition de l'image de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ .
  - (b) Donner la définition du noyau de  $f$ , notée  $\text{Ker}(f)$ .
6. Soit  $E$  un espace vectoriel, quels sont les 3 points à vérifier pour qu'un espace  $F$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$  ?
7. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Comment peut-on caractériser que  $E = F \oplus G$  i.e. que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ? (On donnera au moins deux caractérisations).
8. Enoncer la relation de Chasles pour les intégrales.
9. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Que signifie que  $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$  ?
  - (b) Que signifie que  $f(x) = o_a(g(x))$  ?
10. Donner les équivalents des fonctions suivantes au voisinage de 0 :
  - (a)  $\ln(1+x)$
  - (b)  $e^x - 1$
  - (c)  $(1+x)^\alpha - 1$
  - (d)  $\sin(x)$
  - (e)  $1 - \cos(x)$
  - (f)  $\tan(x)$
11. Soit  $X$  une variable aléatoire finie dont le support est  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,
  - (a) Donner la définition de l'espérance de  $X$ .
  - (b) Citer le théorème de transfert.
  - (c) Donner la formule de König-Huygens.
12. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sous quelle condition la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est-elle convergente ?
13. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et soit  $(B_n)$  une famille d'événements de  $\mathcal{A}$ .
  - (a) Donner la définition de la famille  $(B_n)$  est croissante.
  - (b) Donner la définition de la famille  $(B_n)$  est décroissante.
  - (c) Enoncer le théorème de limite monotone dans le cas où la famille  $(B_n)$  est croissante.
  - (d) Enoncer le théorème de limite monotone dans le cas où la famille  $(B_n)$  est décroissante.
  - (e) Enoncer le corollaire du théorème de limite monotone dans le cas où la famille  $(B_n)$  est quelconque.

## Exercice 2

On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 2. On note  $A$  l'événement « on effectue un nombre fini de lancers ». Autrement dit,  $A$  est l'événement « on obtient au moins un 2 ». On souhaite calculer  $P(A)$ . Pour cela, on considère les événements  $A_n$  « on obtient 2 pour la première fois au  $n$ -ième lancer ».

1. Comment écrire  $A$  à l'aide des événements  $A_n$ ? On n'oubliera pas de justifier sa réponse.

L'évènement  $A$  est réalisé, si et seulement si, il existe un tirage  $n$  où on fait 2, c'est à dire, si il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A_n$  est réalisé. Autrement dit,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

2. Exprimer  $P(A_n)$  en fonction de  $n$ .

$A_n$  est réalisé si on a obtenu un nombre autre que 2 aux  $n-1$  premiers lancers et un 2 au  $n$ -ième lancer. Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$

3. Pour tout  $n \geq 1$ , calculer  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  en fonction de  $n$ .

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux incompatibles, donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

On est donc ramené au calcul d'une somme géométrique. Dès lors :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

4. En déduire  $P(A)$ . Que peut-on dire de l'évènement  $A$ ?

D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, et avec les résultats des questions précédentes, on a :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 \quad \text{car } \frac{5}{6} \in ]-1; 1[.$$

L'évènement  $A$  est donc presque-sûr.

## Exercice 3

1. Déterminer des équivalents simples au voisinage de  $+\infty$  des fonctions suivantes. En déduire leur limite en  $+\infty$ .

(a)  $x^2 - \ln(x) + \frac{1}{e^x}$

$-\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^2)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  donc  $\frac{1}{e^x} \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ . Ainsi

$$x^2 - \ln(x) + \frac{1}{e^x} \underset{+\infty}{\sim} x^2.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x) + \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

(b)  $e^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1$

On a pour commencer  $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^3}$  car  $-x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$  et  $-1 \underset{+\infty}{=} o(2x^3)$ . En simplifiant,  $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{2x^3-1} = 0$ . On a donc :

$$e^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

(c)  $\ln\left(\frac{x^3-x^2+2}{x^3+1}\right)$

Commençons par remarquer que :

$$\frac{x^3-x^2+2}{x^3+1} = \frac{x^3+1}{x^3+1} + \frac{-x^2+1}{x^3+1} = 1 + \frac{-x^2+1}{x^3+1}$$

De plus,  $\frac{-x^2+1}{x^3+1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{x^3} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+1}{x^3+1} = 0$ . Ainsi on a :

$$\ln\left(\frac{x^3-x^2+2}{x^3+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{-x^2+1}{x^3+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x^2+1}{x^3+1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^3-x^2+2}{x^3+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes.

(a)  $\cos(x) - \frac{1}{\tan(x)}$

On a :

$$\cos(x) - \frac{1}{\tan(x)} = \cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cos(x) \left(1 - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \cos(x) \left(\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)}\right) = \frac{\sin(x)-1}{\tan(x)}.$$

Or  $\sin(x) - 1 \underset{0}{\sim} -1$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ .

On a également  $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$  donc

$$\cos(x) - \frac{1}{\tan(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x}.$$

(b)  $\frac{x^3 - 2 \ln(x)}{3^x - 2}$

$x^3 - 2 \ln(x) \underset{0}{\sim} -2 \ln(x)$  car  $x^3 \underset{0}{=} o(-2 \ln(x))$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} 3^x - 2 = -1$  donc  $3^x - 2 \underset{0}{\sim} -1$ . On en déduit :

$$\frac{x^3 - 2 \ln(x)}{3^x - 2} \underset{0}{\sim} \frac{-2 \ln(x)}{-1} \underset{0}{\sim} 2 \ln(x).$$

(c)  $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - x^2} = 2 \text{ donc } \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - x^2} \underset{0}{\sim} 2.$$

3. Etudier la limite des fonctions suivantes :

(a)  $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$  en 1

cf exercice 3 du TD22

(b)  $\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$  en  $+\infty$

$$xe^x - x^2 \underset{+\infty}{\sim} xe^x \text{ car } -x^2 \underset{+\infty}{=} (xe^x). \text{ Donc } \sqrt{xe^x - x^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{xe^x}.$$

D'autre part :  $e^x + e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} e^x$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et que donc  $e^{-x} \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ . Ainsi :

$$\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{xe^x}}{e^x} = \sqrt{\frac{x}{e^x}}.$$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissance comparée donc par composée de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{e^x}} = 0$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

#### Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes (une IPP est parfois nécessaire).

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x) - \cos(x)] dx &= [-\cos(x) - \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) + \sin(0) \\ &= 0 - 1 + 1 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.  $\int_1^e \left(x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx$

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx &= \int_1^e \left(x - 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} (\ln(x))^{2-1}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e \end{aligned}$$

et donc

$$\int_1^e \left(x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \frac{e^2}{2} - 2e + 2$$

3.  $\int_1^e \ln(x) dx$

La fonction  $\ln$  est continue sur  $[1, e]$  donc l'intégrale étudiée a un sens. De plus, on peut remarquer que :

$$\int_1^e \ln(x) dx = \int_1^e 1 \times \ln(x) dx$$

On pose alors :

$$\forall x \in [1, e], f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

$f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1, e]$  donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x) dx &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx \\ &= e \ln(e) - \ln(1) - \int_1^e 1 \cdot dx \\ &= e - (e - 1) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\int_1^e \ln(x) dx = 1$$

4.  $\int_0^1 \left( e^{2x} - \frac{x^2}{x^3 + 1} \right) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( e^{2x} - \frac{x^2}{x^3 + 1} \right) dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) dx \\ &= \left[ \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\ln(x^3 + 1)}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

## Exercice 5

En effectuant le changement de variable  $x = \sin^2(u)$ , calculer l'intégrale  $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$  est continue sur  $\left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$ , donc l'intégrale  $I$  existe. De plus, la fonction  $\varphi : u \mapsto \sin^2(u)$  est de classe  $C^1$  sur  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$  avec  $\varphi \left( \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \right) = \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$  donc, en effectuant le changement de variable  $x = \sin^2(u)$  ( $dx = 2 \cos(u) \sin(u) du$ ) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)}}} \times 2 \cos(u) \sin(u) du \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(u) \sin(u)}{|\sin(u)| |\cos(u)|} du \end{aligned}$$

et comme les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont positives sur  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$  :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \, du \\
 &= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

### Exercice 6

Résoudre le système linéaire  $(S)$  suivant :

$$\begin{cases}
 2x + 3y - z = 5 \\
 4x + 6y - 2z = 10 \\
 x - y + 2z = 1
 \end{cases}$$

On remarque que  $L_2 = 2L_1$  donc  $(S) \iff \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$  Faisons ensuite  $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ , on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -5y + 5z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ y = z + \frac{3}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{5} - 2z \\ y = \frac{3}{5} + z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{8}{5} - 2z, \frac{3}{5} + z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

### Exercice 7

Soit  $g$  l'application linéaire de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  définie pour toute matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  par :

$$g(X) = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ 2x + 3y + z - t \\ x + 2y + 2z + t \end{pmatrix}.$$

- Déterminer une base et la dimension du noyau de  $g$ . L'application  $g$  est-elle injective ?

On cherche les matrices colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  telles que  $g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases}
 x + y + z + t = 0 \\
 2x + 3y + z - t = 0 \\
 x + 2y + 2z + t = 0
 \end{cases}$$

On effectue les opérations suivantes :  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  :  
Le système devient :

$$\begin{cases}
 x + y + z + t = 0 \\
 y - z - 3t = 0 \\
 y + z = 0
 \end{cases}$$

Puis on effectue :  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  :

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - z - 3t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et comporte 3 inconnues principales  $x, y$  et  $z$  et une inconnue secondaire  $t$ .  
On obtient alors :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -\frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(f) = \left\{ \left( -t, \frac{3}{2}t, -\frac{3}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Une base du noyau est donc } \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

La dimension du noyau est 1. Comme  $\dim(\ker(g)) = 1 \neq 0$ , l'application  $g$  n'est **pas injective**.

2. En déduire si  $g$  est surjective.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = \dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)).$$

Donc :

$$4 = 1 + \dim(\text{Im}(g)) \implies \dim(\text{Im}(g)) = 3.$$

Comme  $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$  et que  $\text{Im}(g) \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , on a :  $\text{Im}(g) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et l'application  $g$  est **surjective**.