Corrigé : Interrogation n° 24

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Compléter le tableau suivant :

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$				

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .... Donner les équivalents des suites suivantes :
   (a) $\ln(1+u_n)$
   (b) $\mathrm{e}^{u_n}-1$
   (c) $(1+u_n)^\alpha-1$ avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$
   (d) $\sin(u_n)$
   (e) $1-\cos(u_n)$

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (a) $\ln(1+u_n) \underset{0}{\sim} u_n$
   (b) $\mathrm{e}^{u_n}-1 \underset{0}{\sim} u_n$
   (c) $(1+u_n)^\alpha-1 \underset{0}{\sim} \alpha u_n$ avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$
   (d) $\sin(u_n) \underset{0}{\sim} u_n$
   (e) $1-\cos(u_n) \underset{0}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
   (f) $\tan(u_n) \underset{0}{\sim} u_n$

3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

On a :
$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E \,|\, f(x)=0_F\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)=\{y\in F \,|\, \exists x\in E,\, y=f(x)\}$$

4. Enoncer le théorème du rang. *On n'oubliera pas de préciser les hypothèses.*

> Soit E et F des espaces vectoriels tels que E est de dimension finie, soit $f : E \to F$ une application linéaire alors
> $$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

5. (a) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$?

> $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$.

(b) Donner sa base canonique ?

> Sa base canonique est la famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

6. Enoncer la formule du crible Poincaré qui permet de calculer $P(A \cup B \cup C)$ où A, B et C sont des événements.

> $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

7. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de n

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = -2 \times 5^{n-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ en fonction de n.

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = u_2 \times \frac{1-5^{n-1}}{1-5} = -10 \times \frac{1-5^{n-1}}{-4} = \frac{5}{2}(1-5^{n-1})$.

8. Soit E un espace vectoriel et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, sous quelle condition peut-on développer l'expression $(f+g)^n$? Quand cette condition est vérifiée, quelle est l'expression de $(f+g)^n$?

> Il faut que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$, on a alors :
> $$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

9. Enoncer le théorème de la limite monotone ainsi que son corollaire.

> - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'événements de $\mathcal{T}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
> $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$
> - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'événements de $\mathcal{T}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
> $$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$
>
> — Si (A_n) est une famille quelconque d'événements de $\mathcal{T}$, alors on a :
> $$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

10. Soient deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donner l'expression de $g \circ f$?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)(\sin(t))^2 \mathrm{d}t$

f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(t) = \sin(t)$ et $\alpha = 2$. On a alors $u'(t) = \cos(t)$ et donc :

$$u'u^\alpha = \cos(t)(\sin(t))^2 = f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{2+1}(\sin(t))^{2+1}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[\frac{1}{3}(\sin(t))^3\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{3})^3 - \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{6})^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3\sqrt{3}-1}{24} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x^3+3x^2+9x+1)^2} \mathrm{d}x$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^3+3x^2+9x+1$. On a alors $u'(x) = 3x^2+6x+9$ et donc :

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{3x^2+6x+9}{(x^3+3x^2+9x+1)^2} = 3f(x).$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u^2}$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{x^3+3x^2+9x+1}\right)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1^3+3\times(1)^2+9\times1+1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} \\ &= -\frac{1}{3\times14} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{-1+14}{42} = \frac{13}{42}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$

Remarquons que $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ est donc donnée par $t \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} t^{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} \times (2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} - \left(\frac{2}{3} \times (1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1}\right) \\
&= \frac{2}{3} \times (2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \mathrm{d}x$

Commençons par étudier le signe du polynôme $x^2 - 3x + 2$. Ses racines sont 1 et 2. Donc $x^2 - 3x + 2 < 0$ pour $x \in]1, 2[$ et $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ sinon. On a alors d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 |x^2 - 3x + 2| \mathrm{d}x + \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| \mathrm{d}x + \int_2^3 |x^2 - 3x + 2| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 - 3x + 2 \mathrm{d}x - \int_1^2 x^2 - 3x + 2 \mathrm{d}x + \int_2^3 x^2 - 3x + 2 \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 \\
&= \frac{1^3}{3} - \frac{3 \times 1^2}{2} + 2 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3 \times 2^2}{2} + 2 \times 2\right) + \frac{1^3}{3} - \frac{3 \times 1^2}{2} + 2 + \frac{3^3}{3} - \frac{3 \times 3^2}{2} + 2 \times 3 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3 \times 2^2}{2} + 2 \times 2\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 2\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) + 9 - \frac{27}{2} + 6 \\
&= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, x + y + z = 0 \text{ et } x - 2z = 0 \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

On a :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, y = -x - z \text{ et } x = 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, y = -3z \text{ et } x = 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi E est l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est donc bien un espace vectoriel. Pour déterminer sa dimension, exhibons une base de cet espace.
Comme E est l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de E, de plus elle est composée d'un unique vecteur non nul donc elle est libre. C'est donc une base de E et on peut affirmer que E est de dimension 1.

Exercice 4

Après avoir démontré sa convergence, calculer la somme de cette série : $\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{3^n}$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k^2}{3^k}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=3}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} - 2(2-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} - \frac{7}{9} \end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles des séries géométriques dérivées première et seconde de raison $\frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3} \in]-1,1[$, ces deux sommes partielles convergent donc (S_n) converge. La série $\sum_{n\geq 3} \frac{n^2}{3^n}$ est donc convergente et on a :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} - \frac{7}{9} = \frac{13}{18}.$$

Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.

   On calcule les produits matriciels et on obtient : $A^3 - A = 4I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

   On a :

$$A^3 - A = 4I_3 \iff A(A^2 - I_3) = 4I_3 \iff A \times \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = I_3$$

On en déduit donc que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$ soit

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1. Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).
   (a) Je travaille aux lycées Charles de Gaulle et Malherbe et possède donc 2 badges d'entrée (un pour chaque lycée). Les deux badges sont identiques. En arrivant devant le lycée, je ne sais jamais quel badge est le bon et choisis au hasard. On note X la variable aléatoire égale à 1 si je trouve le bon badge du premier coup et égale à 0 sinon.

   X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité $\frac{1}{2}$) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

   (b) Mon fils a découvert, cette année, le concept de 1er avril et a donc passé la journée à faire des blagues. Une étude statistique a montré qu'environ un tiers des blagues des enfants de 4 ans sont effectivement drôles. Il a fait environ 70 blagues dans la journée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de blagues qu'il a faites et qui ont fait rire ses parents.

   On note succès " la blague a effectivement faire rire les parents ", selon l'énoncé le succès est de probabilité $\frac{1}{3}$. Mon fils a fait 70 blagues et a donc répété 70 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = \frac{1}{3}$.

2. Mon fils a fini par comprendre que ses blagues n'étaient pas toujours drôles et il a décidé de les tester sur sa soeur avant de nous les raconter. Il se trouve que sa soeur rit une fois sur deux et que lorsqu'elle rit, nous rions nous-mêmes deux fois sur trois. En revanche, lorsqu'elle ne rit pas, la probabilité que la blague nous fasse rire est d'une chance sur 4.
   Il se lance et nous raconte une blague quelle est donc la probabilité qu'elle nous fasse rire ?

   Notons A l'événement : « sa soeur rit à sa blague » et D l'événement : « ses parents rient à sa blague ». $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements, on a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D) \\ &= P(A)P_A(D) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(D) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

   La probabilité que sa blague nous fasse rire est de $\frac{17}{24} \simeq 0,7$.

Exercice 7

1. Simplifier les écritures suivantes :
   (a) $A = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}$

$$A = \frac{\mathrm{e}^{2x+4}}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \mathrm{e}^{2x+4-2x+1} = \mathrm{e}^5.$$

(b) $B = \ln(\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{2-x})$

$$B = \ln\left(\mathrm{e}^{2x+1+2-x}\right) = x + 3.$$

(c) $C = \ln(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$C = \ln(x)(-\ln(x)) = -\ln(x)^2.$$

2. Résoudre sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ l'inéquation : $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0.$

Soit $x \in]-\frac{1}{2},+\infty[$, on a :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0 \iff \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq \ln(1) \iff \frac{2x+1}{x+1} \leq 1 \iff \frac{2x+1}{x+1} - 1 \leq 0 \iff \frac{x}{x+1} \leq 0$$

Pour tout $x \in \in]-\frac{1}{2},+\infty[$, $x+1>0$, le signe du quotient dépend donc du signe de x, on a donc : $\mathscr{S} =]-\frac{1}{2},0]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1 = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$, remarquons que l'équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$2(\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x - 1 = 0.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$, on a alors :

$$2X^2 - X - 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut : 9 et elle possède donc deux racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Il nous reste alors à résoudre les deux équations suivantes :

$$\mathrm{e}^x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1.$$

Comme $-\frac{1}{2} < 0$, la première équation n'a pas de solution. La deuxième possède une unique solution valant $\ln(1) = 0$. Ainsi $\mathscr{S} = \{0\}$.

Exercice 8

Lors de ce beau week-end de Pâques, mes deux enfants ont cherché assidûment des oeufs en chocolat dans le jardin. On considère que leur chasse consiste à aller vérifier toutes les cachettes du jardin pour y trouver des oeufs. Comme ils sont tout excités par leur recherche, ils oublient au fur et à mesure quels endroits ils ont vérifié et peuvent donc chercher plusieurs fois au même endroit, on considère donc que leurs différentes vérifications sont indépendantes les unes des autres. Les cloches ont semé les oeufs dans le jardin de telle sorte que la probabilité qu'un oeuf se trouve effectivement dans une cachette est de $\frac{1}{8}$.

On note A l'événement « ils ont trouvé au moins un oeuf en chocolat dans le jardin ». On souhaite calculer $P(A)$. Pour cela, on considère les événements A_n « ils découvrent leur premier oeuf en chocolat à la n-ème vérification ».

1. Comment écrire A à l'aide des événements A_n ?

> L'évènement A est réalisé, si et seulement si, il existe une cachette dans laquelle ils trouvent un oeuf en chocolat, autrement si il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n est réalisé. Autrement dit,
>
> $$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \,.$$

2. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.

> A_n est réalisé si ils n'ont pas trouvé d'oeufs dans les $n-1$ premières cachettes et si ils ont trouvé un oeuf dans la n-ème cachette. Comme ils peuvent revisiter plusieurs fois la même cachette, on peut considérer que les vérifications sont indépendantes. Ainsi, on obtient :
>
> $$P(A_n) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{n-1} \times \frac{1}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \times \frac{1}{8}\,.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, calculer $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ en fonction de n.

> Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, donc :
>
> $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\,.$$
>
> On est donc ramené au calcul d'une somme géométrique. Dès lors :
>
> $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{8} \times \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1-\frac{7}{8}} = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n\,.$$

4. En déduire $P(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

> D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, et avec les résultats des questions précédentes, on a :
>
> $$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n\right) = 1 \qquad \text{car } \frac{7}{8} \in]-1;1[.$$
>
> L'événement A est donc presque-sûr. Mes enfants vont donc trouver presque-sûrement un oeuf en chocolat dans le jardin.

Exercice 9

On définit la fonction f sur $[0, 2\pi]$ par :

$$f(x) = x\sin(x) + \cos(x).$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, 2\pi]$.

> La fonction f est dérivable sur $[0, 2\pi]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[0, 2\pi]$. On a :
>
> $$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f'(x) = x\cos(x).$$
>
> Sur $[0, 2\pi]$, le signe de f' est donc le signe du cosinus. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	1

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0, 2\pi]$. On les notera α_1 et α_2 avec $\alpha_1 < \alpha_2$.

D'après son tableau de variation, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ car elle est croissante sur cet intervalle que $f(0) = 1$. Ainsi la fonction f ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Sur l'intervalle, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ et $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2} < 0$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule une unique fois sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ie l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Notons cette valeur α_1.
Sur l'intervalle, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2} < 0$ et $f(2\pi) = 1 > 0$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule une unique fois sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ie l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Notons cette valeur α_2.
On a bien par construction des valeurs α_1 et α_2 que $\alpha_1 < \alpha_2$.

3. Montrer que $\frac{5\pi}{6} < \alpha_1 < \pi$.

Calculons $f(\frac{5\pi}{6})$ et $f(\pi)$. On a $f(\pi) = -1$. Pour calculer $f(\frac{5\pi}{6})$, remarquons que $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, ainsi :

$$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos(\pi)\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

et

$$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\pi)\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} > 0$. En effet $5\pi > 15$ car $\pi > 3$ et $\sqrt{3} \leq 2$ donc $6\sqrt{3} < 12$ donc $5\pi - 6\sqrt{3} > 0$.
Ainsi on a :

$$f(\pi) < 0 = f(\alpha_1) < f(\frac{5\pi}{6})$$

et comme f est décroissante sur cet intervalle, on en déduit que : $\frac{5\pi}{6} < \alpha_1 < \pi$