Interrogation n° 24

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Enoncer le théorème du rang.
2. (a) Enoncer le théorème de la limite monotone.
   (b) Enoncer le corollaire du théorème de la limite monotone.

Exercice 2

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.

Corrigé : Interrogation n° 24

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Enoncer le théorème du rang.
2. (a) Enoncer le théorème de la limite monotone.

> - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'événements de $\mathcal{T}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
> $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$
> - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'événements de $\mathcal{T}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
> $$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

(b) Enoncer le corollaire du théorème de la limite monotone.

> Si (A_n) est une famille quelconque d'événements de $\mathcal{T}$, alors on a :
> $$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \text{et} \qquad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Exercice 2

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, par

$$u((x,y,z,t)) = (x+y+z+t, y-t, x-2z+3t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.

> Soient $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et $X'=(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
> $$\begin{aligned} u(\lambda X+X') &= u((\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z', \lambda t+t')) \\ &= (\lambda x+x'+\lambda y+y'+\lambda z+z'+\lambda t+t', \lambda y+y'-(\lambda t+t'), \lambda x+x'-2(\lambda z+z')+3(\lambda t+t')) \\ &= (\lambda(x+y+z+t)+x'+y'+z'+t', \lambda(y-t)+y'-t', \lambda(x-2z+3t)+x'-2z'+3t') \\ &= \lambda u((x,y,z,t))+u((x',y',z',t')) \\ &= \lambda u(X)+u(Y) \end{aligned}$$
> Ainsi u est bien une application linéaire.

2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?

> Soit $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u)$ alors $u((x,y,z,t)) = (0,0,0)$. On a alors le système suivant :
>
> $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & & & - & t & = & 0 \\ x & & & - & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> On effectue le codage $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient le système équivalent :
>
> $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & & & - & t & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> On effectue le codage $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et on obtient le système équivalent :
>
> $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & & & - & t & = & 0 \\ & & & - & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> On résout alors le système qui est maintenant échelonné. On choisit les variables x, y, t comme variables principales et z comme inconnue secondaire. On a alors :
>
> $$\left\{\begin{array}{ll} x & = -y - z - t = -3z - z - 3z = -7z \\ y & = t = 3z \\ t & = 3z \end{array}\right.$$
>
> Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -7z,\ y = 3z,\ t = 3z\big\} = \{(-7z, 3z, z, 3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-7,3,1,3))$.
> La famille $((-7,3,1,3))$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(u)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$. On en déduit au passage que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.
> $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ donc u n'est pas injective.

3. En déduire que u est surjective.

> D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 4 - 1 = 3$.
> Or par définition, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ et u est surjective.