

Interrogation n° 23

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Enoncer le théorème du rang.

2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements. Compléter les assertions suivantes :

$$(a) \ x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \dots\dots\dots$$

$$(b) \ x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \dots\dots\dots$$

Exercice 2

Soit u l'application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u . Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.

Corrigé : Interrogation n° 23

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Enoncer le théorème du rang.
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements. Compléter les assertions suivantes :
 - (a) $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \dots\dots\dots$
 - (b) $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \dots\dots\dots$

Exercice 2

Soit u l'application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $X' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda X + X') &= u((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')) \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z' + \lambda t + t', \lambda y + y' - (\lambda t + t'), \lambda x + x' - 2(\lambda z + z') + 3(\lambda t + t')) \\ &= (\lambda(x + y + z + t) + x' + y' + z' + t', \lambda(y - t) + y' - t', \lambda(x - 2z + 3t) + x' - 2z' + 3t') \\ &= \lambda u((x, y, z, t)) + u((x', y', z', t')) \\ &= \lambda u(X) + u(Y) \end{aligned}$$

Ainsi u est bien une application linéaire.

2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u . Est-elle injective ?

Soit $(x, y, z, t) \in \text{Ker}(u)$ alors $u((x, y, z, t)) = (0, 0, 0)$. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ + y - t = 0 \\ x - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

On effectue le codage $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ + y - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \end{cases}$$

On effectue le codage $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ + y - t = 0 \\ - 3z + t = 0 \end{cases}$$

On résout alors le système qui est maintenant échelonné. On choisit les variables x, y, t comme variables principales et z comme inconnue secondaire. On a alors :

$$\begin{cases} x &= -y - z - t = -3z - z - 3z = -7z \\ y &= t = 3z \\ t &= 3z \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(u) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -7z, y = 3z, t = 3z\} = \{(-7z, 3z, z, 3z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-7, 3, 1, 3))$.
La famille $((-7, 3, 1, 3))$ est génératrice de $\text{Ker}(u)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\text{Ker}(u)$. On en déduit au passage que $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$.
 $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ donc u n'est pas injective.

3. En déduire que u est surjective.

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(u)) = 4 - 1 = 3$.
Or par définition, $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ et u est surjective.