Interrogation n° 23

Exercice 1 *Question de cours*

1. Donner, **sans justification**, la dimension des espaces vectoriels ci-dessous :
   (a) $\mathbb{R}^n$
   (b) $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$
   (c) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
   (d) $\mathbb{R}_n[x]$
   (e) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
   (p) Un hyperplan H dans un espace vectoriel E de dimension finie.
   (o) $S_n(\mathbb{R})$
   (i) $\mathrm{Vect}(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n)$ où l_i désigne le i-ème polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[x]$ pour $\in [\![0, n]\!]$
   (s) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$
   (s) Généraliser le résultat pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ quotienté par un idéal engendré par un polynôme irréductible
   (o) Le corps des quaternions vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
   (n) $L^p(\mathbb{R})$ (*On rappelle que cet espace est l'ensemble des fonctions f tel que $|f|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue.*)
2. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit f : $E \longrightarrow F$ une application linéaire.
   Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t).$$

Déterminer une base de son noyau et de son image.

Corrigé : Interrogation n° 23

Exercice 1 *Question de cours*

1. Donner, **sans justification**, la dimension des espaces vectoriels ci-dessous :

(a) $\mathbb{R}^n$

> $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

(b) $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

> $\dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) = p$

(c) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

> $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$

(d) $\mathbb{R}_n[x]$

> $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$

(e) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

> $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

(p) Un hyperplan H dans un espace vectoriel E de dimension finie.

> $\dim(H) = \dim(E) - 1$

(o) $S_n(\mathbb{R})$

> $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(i) $\mathrm{Vect}(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n)$ où l_i désigne le i-ème polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[x]$ pour $\in [\![0, n]\!]$

> $\dim(\mathrm{Vect}(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n)) = n+1$

(s) $\mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)}$

> $\dim(\mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)}) = 2$

(s) Généraliser le résultat pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ quotienté par un idéal engendré par un polynôme irréductible

> Notons F cet espace et P le polynôme irréductible qui engendre l'idéal, $\dim(F) = \deg(P)$.

(o) Le corps des quaternions vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

> $\dim(\mathbb{H}) = 2$

(n) $L^p(\mathbb{R})$ (*On rappelle que cet espace est l'ensemble des fonctions f tel que $|f|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue.*)

> $L^p(\mathbb{R})$ est de dimension infinie

2. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soit f : $E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

> On a :
>
> $$F = \{P = ax^2 + bx + c \mid a + b + c = 0\} = \{P = ax^2 + bx + c \mid a = -b - c\} = \{P = (-b - c)x^2 + bx + c, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$$
>
> $$F = \{P = b(-x^2 + x) + c(-x^2 + 1), (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left(-x^2 + x, -x^2 + 1\right)$$
>
> La famille $\left(-x^2 + x, -x^2 + 1\right)$ est génératrice de F, elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi c'est une base de F. La base étant de cardinal 2, on en déduit que $\dim(F) = 2$.

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t).$$

Déterminer une base de son noyau et de son image.

> Soit $(x, y, z, t) \in \text{Ker}(f)$, on a $f((x, y, z, t)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc
>
> $$(2x + y + z, x + y + t, x + z - t) = (0, 0, 0).$$
>
> On obtient alors le système :
>
> $$(\mathcal{S}) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ x & + & y & & & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> On effectue les opérations : $L_2 \leftarrow 2L_2 - L1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$, on a :
>
> $$(\mathcal{S}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & & -y & + & z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> $$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & -z \\ & & y & = & z - 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z + t \\ y & = & z - 2t \end{array}\right.$$
>
> Ainsi
>
> $$\text{Ker}(f) = \{(-z + t, z - 2t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1, 1, 1, 0), (1, -2, 0, 1)).$$
>
> La famille $((-1, 1, 1, 0), (1, -2, 0, 1))$ est donc génératrice de $\text{Ker}(f)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

A l'aide du théorème du rang, on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

Or

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}((2,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,-1))$$

On remarque que $(1,1,0)+(1,0,1)=(2,1,1)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,-1))$$

On remarque aussi que $(1,1,0)-(1,0,1)=(0,1,-1)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1)).$$

La famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et on sait que c'est une base d'après le théorème du rang car elle est de cardinal 2.

