Interrogation n° 22

Exercice 1 *Question de cours*

Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

Exercice 2

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3}{2^{n+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-\ln(n)}{n^5-n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathrm{e}^{-3n}$

Corrigé : Interrogation n° 22

Exercice 1 *Question de cours*

Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

1. Série géométrique : $\sum_{n\geq 0} q^n$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

2. Série géométrique dérivée première : $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3. Série géométrique dérivée seconde : $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

4. Série exponentielle : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

5. Série de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. On n'a pas de formule générale exprimant la valeur de sa somme pour tout $\alpha > 1$.

Exercice 2

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{2^{n+1}}$

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{3}{2^{n+1}}$.
Etudions la convergence de la somme partielle de cette série. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^{k+1}} = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \times 2} = \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{2^k} = \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique avec $q = \frac{1}{2}$. Comme $q = \frac{1}{2} \in]-1;1[$, on en déduit que cette somme partielle converge que donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{2^{n+1}}$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{3n^2}{2^n}$. Etudions la convergence de la somme partielle de cette série, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{1^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Cela nous fait penser à la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde à cause du k^2 (car $k(k-1) = k^2 - k$) mais il faut encore la modifier pour faire vraiment apparaître la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1+1) \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k \left(\frac{1}{3}\right)^k
\end{aligned}$$

La première somme ressemble quasiment à la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde. Il faut modifier l'indice de début de somme ($k = 2$ au lieu de $k = 0$) et la puissance sur le $\frac{1}{3}$.

La deuxième somme ressemble quasiment à la somme partielle de la série géométrique dérivée première. Il faut modifier l'indice de début de somme ($k = 1$ au lieu de $k = 0$) et la puissance sur le $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors pour la première somme la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde pour $q = \frac{1}{3}$. Elle converge bien car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$.

On reconnaît alors pour la deuxième somme la somme partielle de la série géométrique dérivée première pour $q = \frac{1}{3}$. Elle converge bien car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$.

Ainsi la somme partielle (S_n) est convergente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{3^k} &= \frac{1}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \frac{1}{9}\times\frac{2}{\frac{2^3}{3^3}}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \frac{3}{2^2}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\\ &= \frac{3}{4}+\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^3-\ln(n)}{n^5-n^2}$

> On a : $n^3-\ln(n)\sim n^3$ car $\ln(n)=o(n^3)$ et $n^5-n^2\sim n^5$ car $n^2=o(n^5)$ donc
>
> $$\frac{n^3-\ln(n)}{n^5-n^2}\sim\frac{1}{n^2}$$
>
> Comme $\frac{1}{n^2}>0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^3-\ln(n)}{n^5-n^2}$ est également à termes positifs à partir d'un certain rang.
>
> Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente car on reconnaît une série de Riemann avec $\alpha=2>1$. Ainsi d'après le critère de convergence par équivalent, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^3-\ln(n)}{n^5-n^2}$ est convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n$

> On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n$ diverge grossièrement.

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n\mathrm{e}^{-3n}$

> La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n\mathrm{e}^{-3n}$ est à termes positifs. On a : $n\mathrm{e}^{-3n}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en effet,
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-3n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}n^3\mathrm{e}^{-3n}=0 \quad \text{par croissance comparée.}$$
>
> Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente car on reconnaît une série de Riemann avec $\alpha=2>1$. Ainsi d'après le critère de convergence par négligeabilité $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n\mathrm{e}^{-3n}$ est convergente.