Interrogation n° 22

Exercice 1 *Question de cours*

Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

Exercice 2

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4}{5^{n+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{7^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3n^2}{2^n}$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2.$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^4 \mathrm{e}^{-n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2n+1}{n^5-4n+\ln(n)}$

Corrigé : Interrogation n° 22

Exercice 1 *Question de cours*

Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

1. Série géométrique : $\sum_{n\geq 0} q^n$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

2. Série géométrique dérivée première : $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3. Série géométrique dérivée seconde : $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1;1[$ et on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

4. Série exponentielle : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

5. Série de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. On n'a pas de formule générale exprimant la valeur de sa somme pour tout $\alpha > 1$.

Exercice 2

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{5^{n+1}}$

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{4}{5^{n+1}}$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Etudions la convergence de la somme partielle de cette série. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{5^{k+1}} = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k \times 5} = \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{5^k} = \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k.$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique avec $q = \frac{1}{5}$. Comme $q = \frac{1}{5} \in]-1;1[$, on en déduit que cette somme partielle converge que donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{5^{n+1}}$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{5^{k+1}} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{\frac{4}{5}} = 1.$$

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{7^n}$

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{n}{7^n}$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ par croissance comparée.
Etudions la convergence de la somme partielle de cette série. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{7^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{7\times 7^k} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n} k\frac{1^{k-1}}{7^{k-1}} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{7}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique dérivée première avec $q = \frac{1}{7}$. Comme $q = \frac{1}{7} \in]-1;1[$, on en déduit que cette somme partielle converge que donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{7^n}$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{7^k} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\frac{36}{49}} = \frac{7}{36}.$$

3. $\sum_{n\geq 0} \frac{3n^2}{2^n}$

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{3n^2}{2^n}$. Etudions la convergence de la somme partielle de cette série, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3k^2}{2^k} = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 3\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{1^k}{2^k} = 3\sum_{k=0}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Cela nous fait penser à la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde à cause du k^2 (car $k(k-1) = k^2 - k$) mais il faut encore la modifier pour faire vraiment apparaître la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde.

$$\begin{aligned}
T_1 &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k(k-1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

La première somme ressemble quasiment à la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde. Il faut modifier l'indice de début de somme ($k = 2$ au lieu de $k = 0$) et la puissance sur le $\frac{1}{2}$.
La deuxième somme ressemble quasiment à la somme partielle de la série géométrique dérivée première. Il faut modifier l'indice de début de somme ($k = 1$ au lieu de $k = 0$) et la puissance sur le $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= 3\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 3\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors pour la première somme la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde pour $q=\frac{1}{2}$. Elle converge bien car $\frac{1}{2}\in]-1;1[$.
On reconnaît alors pour la deuxième somme la somme partielle de la série géométrique dérivée première pour $q=\frac{1}{2}$. Elle converge bien car $\frac{1}{2}\in]-1;1[$.

Ainsi la somme partielle (S_n) est convergente, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3k^2}{2^k} &= \frac{3}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{3}{4}\times\frac{2}{\frac{1^3}{2^3}} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{3\times 4}{1} + \frac{3}{2}\times\frac{4}{1} \\
&= 12+6 \\
&= 18.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geq 0} n^2$.

Le terme général de cette série est $u_n = n^2$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Ainsi cette série est divergente.

2. $\sum_{n\geq 0} n^4 \mathrm{e}^{-n}$

La série est à termes positifs, on a :

$$n^2\times n^4\mathrm{e}^{-n} = n^6\mathrm{e}^{-n}.$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} n^6\mathrm{e}^{-n} = 0$ donc $n^4\mathrm{e}^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente donc d'après le critère de convergence par négligeabilité, la série $\sum_{n\geq 0} n^4\mathrm{e}^{-n}$ est convergente.

3. $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2n+1}{n^5-4n+\ln(n)}$

On a, d'une part, $n^2-2n+1\sim n^2$ car $-2n=o(n^2)$ et $1=o(n^2)$. D'autre part, on a $n^5-4n+\ln(n)\sim n^5$ car

$\ln(n) = o(n^5)$ et $-4n = o(n^5)$. Donc par quotient :

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)} \sim \frac{n^2}{n^5}$$

i.e.

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)} \sim \frac{1}{n^3}.$$

Le terme $\frac{1}{n^3}$ est positif donc le terme $\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$ est également positif à partir d'un certain rang. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$. Ainsi d'après le critère de convergence par équivalent, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$ est convergente.

