

Interrogation n° 21

Exercice 1 Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et α un réel non nul fixé. Donner les équivalents des fonctions suivantes :

- (a) $\ln(1 + u_n)$
- (b) $e^{u_n} - 1$
- (c) $(1 + u_n)^\alpha - 1$
- (d) $\sin(u_n)$
- (e) $1 - \cos(u_n)$
- (f) $\tan(u_n)$

2. Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

Exercice 2

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{7^n}$ puis calculer sa somme.

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes.

- 1. $\sum_{n \geq 0} n^2$.
- 2. $\sum_{n \geq 0} n^4 e^{-n}$
- 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$

Corrigé : Interrogation n° 21

Exercice 1 Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et α un réel non nul fixé. Donner les équivalents des fonctions suivantes :

- (a) $\ln(1 + u_n)$
- (b) $e^{u_n} - 1$
- (c) $(1 + u_n)^\alpha - 1$
- (d) $\sin(u_n)$
- (e) $1 - \cos(u_n)$
- (f) $\tan(u_n)$

2. Citer les cinq séries de référence, leur critère de convergence et lorsque l'on la connaît la valeur de leur somme.

(a) Série géométrique : $\sum_{n \geq 0} q^n$. Cette série est convergente pour $q \in]-1; 1[$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Série géométrique dérivée première : $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1; 1[$ et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(c) Série géométrique dérivée seconde : $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$. Cette série est convergente pour $q \in]-1; 1[$ et on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

(d) Série exponentielle : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

(e) Série de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. On n'a pas de formule générale exprimant la valeur de sa somme pour tout $\alpha > 1$.

Exercice 2

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{7^n}$ puis calculer sa somme.

Le terme général de cette série est $u_n = \frac{n}{7^n}$.

Étudions la convergence de la somme partielle de cette série. On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{7^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{7 \times 7^{k-1}} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^n k \frac{1^{k-1}}{7^{k-1}} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{7}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique dérivée première avec $q = \frac{1}{7}$. Comme $q = \frac{1}{7} \in]-1; 1[$, on en déduit que cette somme partielle converge donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{7^n}$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{7^k} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\frac{36}{49}} = \frac{7}{36}.$$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} n^2$.

Le terme général de cette série est $u_n = n^2$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Ainsi cette série est divergente.

2. $\sum_{n \geq 0} n^4 e^{-n}$

La série est à termes positifs, on a :

$$n^2 \times n^4 e^{-n} = n^6 e^{-n}.$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 e^{-n} = 0$ donc $n^4 e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc d'après le critère de convergence par négligeabilité, la série $\sum_{n \geq 0} n^4 e^{-n}$ est convergente.

3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$

On a, d'une part, $n^2 - 2n + 1 \sim n^2$ car $-2n = o(n^2)$ et $1 = o(n^2)$. D'autre part, on a $n^5 - 4n + \ln(n) \sim n^5$ car $\ln(n) = o(n^5)$ et $-4n = o(n^5)$. Donc par quotient :

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)} \sim \frac{n^2}{n^5}$$

i.e.

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)} \sim \frac{1}{n^3}.$$

Le terme $\frac{1}{n^3}$ est positif donc le terme $\frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$ est également positif à partir d'un certain rang. Or la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$. Ainsi d'après le critère de convergence par

équivalent, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 - 4n + \ln(n)}$ est convergente.