Interrogation n° 21

Exercice 1 *Question de cours*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite .... et α un réel non nul fixé. Donner les équivalents des suites suivantes :

1. $\ln(1+u_n)$
2. $\mathrm{e}^{u_n}-1$
3. $(1+u_n)^\alpha-1$
4. $\sin(u_n)$
5. $1-\cos(u_n)$
6. $\tan(u_n)$

Exercice 2

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite :

1. $u_n = \dfrac{-5n+4}{3n^3-n+8}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+3n-2}}{\sqrt{16n^2-13}}$
3. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5n^2-2n+3}}\right)^4-1$

Corrigé : Interrogation n° 21

Exercice 1 *Question de cours*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite .... et α un réel non nul fixé. Donner les équivalents des suites suivantes :

1. $\ln(1+u_n)$
2. $\mathrm{e}^{u_n}-1$
3. $(1+u_n)^\alpha-1$
4. $\sin(u_n)$
5. $1-\cos(u_n)$
6. $\tan(u_n)$

Exercice 2

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite :

1. $u_n = \dfrac{-5n+4}{3n^3-n+8}$

> On a $3n^3-n+8 \sim 3n^3$ car $-n = o(3n^3)$ et $8 = o(3n^3)$.
> On a $-5n+4 \sim -5n$ car $4 = o(-5n)$.
> Ainsi $u_n \sim \dfrac{-5n}{3n^3}$ soit $\boxed{u_n \sim \dfrac{-5}{3n^2}}$. On en déduit que :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{3n^2} = 0.$$

2. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+3n-2}}{\sqrt{16n^2-13}}$

> On a $16n^2-13 \sim 16n^2$ car $-13 = o(16n^2)$. Ainsi par passage à la puissance $\sqrt{16n^2-13} \sim \sqrt{16n^2}$.
> On a $8n^3+3n-2 \sim 8n^3$ car $3n = o(8n^3)$ et $-2 = o(8n^3)$. Ainsi par passage à la puissance, $\sqrt[3]{8n^3+3n-2} \sim \sqrt[3]{8n^3}$.
> Ainsi $u_n \sim \dfrac{2n}{4n}$ soit $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}}$. On en déduit que :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{5n^2-2n+3}}\right)^4 - 1$

> On a $5n^2-2n+3 \sim 5n^2$ car $-2n = o(5n^2)$ et $3 = o(5n^2)$ donc par passage à la puissance et au quotient, on a $\dfrac{1}{\sqrt{5n^2-2n+3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{5n}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5n^2-2n+3}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5n}} = 0$. On peut donc appliquer l'équivalent usuel et on a :
> $$u_n \sim 4 \times \frac{-1}{\sqrt{5n^2-2n+3}}$$

Or on a montré que $\dfrac{1}{\sqrt{5n^2-2n+3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}n}$ donc on a :

$$u_n \sim \frac{-4}{\sqrt{5}n}.$$

On déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{5}n} = 0.$$

