Interrogation n° 20

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange. *On précisera bien les hypothèses.*

Exercice 2

Ecrire la formule de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre 3 pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 3

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite :

1. $u_n = \dfrac{-5n+4}{3n^3-n+8}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+3n-2}}{\sqrt{16n^2-13}}$

Corrigé : Interrogation n° 20

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange. *On précisera bien les hypothèses.*

Exercice 2

Ecrire la formule de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre 3 pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\frac{24}{(1-t)^5}\mathrm{d}t \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \int_0^x (x-t)^3 \frac{4}{(1-t)^5}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Exercice 3

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite :

1. $u_n = \dfrac{-5n+4}{3n^3 - n + 8}$

On a $3n^3 - n + 8 \sim 3n^3$ car $-n = o(3n^3)$ et $8 = o(3n^3)$.
On a $-5n + 4 \sim -5n$ car $4 = o(-5n)$.
Ainsi $u_n \sim \dfrac{-5n}{3n^3}$ soit $\boxed{u_n \sim \dfrac{-5}{3n^2}}$. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{3n^2} = 0.$$

2. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 + 3n - 2}}{\sqrt{16n^2 - 13}}$

On a $16n^2 - 13 \sim 16n^2$ car $-13 = o(16n^2)$. Ainsi par passage à la puissance $\sqrt{16n^2 - 13} \sim \sqrt{16n^2}$.
On a $8n^3 + 3n - 2 \sim 8n^3$ car $3n = o(8n^3)$ et $-2 = o(8n^3)$. Ainsi par passage à la puissance, $\sqrt[3]{8n^3 + 3n - 2} \sim \sqrt[3]{8n^3}$.
Ainsi $u_n \sim \dfrac{2n}{4n}$ soit $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}}$. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

