Interrogation n° 20

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Combien vaut $(fg)^{(n)}$? Citer le nom de cette formule ?
   On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f et g.
2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.
   On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f.

Exercice 2

Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 4 pour la fonction $\cos$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x,y,z)) = \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right).$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer ses caractéristiques.

Corrigé : Interrogation n° 20

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Combien vaut $(fg)^{(n)}$? Citer le nom de cette formule ?

> Il s'agit de la formule de Leibniz :
> Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et
> $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f et g.

2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.
On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f.

> Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I. Pour tout $(a,b) \in I^2$,
> $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$
> On appelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ la **partie polynomiale** de la formule et $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ le **reste intégral** d'ordre n.

Exercice 2

Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 4 pour la fonction $\cos$.

> La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $x \in [a,b]$, on a :
> $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} f^{(5)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \cos(0) - \frac{\sin(0)}{1!}x^1 - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \times (-\sin(t))\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\int_0^x (x-t)^4 \sin(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$f((x,y,z)) = \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right).$$

1. Montrer que f est un projecteur.

> L'énoncé nous indique déjà que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, il reste donc à montrer que $f \circ f = f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
>
> $$\begin{aligned} f \circ f(x,y,z) &= f\left(\left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x+y+z}{2} + y + \frac{x-y+z}{2}}{2}, y, \frac{\frac{x+y+z}{2} + y + \frac{x-y+z}{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right) \\ &= f((x,y,z)). \end{aligned}$$
>
> L'endomorphisme f est donc bien un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer ses caractéristiques.

> Commençons par déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f((x,y,z)) = (0,0,0)$. On obtient alors le système :
>
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> soit $y = 0$ et $x = -z$. Ainsi
>
> $$\mathrm{Ker}(f) = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-1,0,1)).$$
>
> Déterminons ensuite $\mathrm{Im}(f)$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice car c'est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ainsi :
>
> $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\right) = \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(1,2,-1)\right).$$
>
> L'endomorphisme f est donc un projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0,1),(1,2,-1)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((-1,0,1))$.