Corrigé : Interrogation n° 20

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Compléter le tableau suivant :

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)			
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$		$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	
En particulier si $\alpha = -2$, $\dfrac{1}{x^2}$		$-\dfrac{u'}{u^2}$	
En particulier si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	
$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{u'}{u}$	
e^x		$u'e^u$	
$\cos(x)$		$u'\cos(u)$	
$\sin(x)$		$u'\sin(u)$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\dfrac{u'}{1+u^2}$	

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax + C$		
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
En particulier si $\alpha = -2$, $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u} + C$
En particulier si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	$u'e^u$	$e^u + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$

2. Donner la formule de König-Huygens.

3. Donner les bases canoniques des espaces vectoriels suivants :
   (a) $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (c) $\mathbb{R}_3[x]$
   (d) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
4. Enoncer la propriété de croissance de l'intégrale.
5. Enoncer le théorème portant sur la somme de Riemann $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   On précisera bien les hypothèses que doit vérifier la fonction f.
6. Sous quelle(s) condition(s) la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est-elle dérivable ? Que vaut sa dérivée ?
7. Soit (A_1, A_2, A_3) un système complet d'événements, citer la formule des probabilités totales permettant de calculer $P(B)$ pour B un événement.
8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $p \in [0,1]$.
   (a) Donner sa loi et son support.
   (b) Donner son espérance et sa variance.
9. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner sa loi et son support.
   (b) Donner son espérance et sa variance.
10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$, donner la définition de f est dérivable en a.
11. Soient deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Que vaut la dérivée de $g \circ f$?
12. Soit $f : I \to J$ une fonction bijective, on note f^{-1} sa bijection réciproque. Sous quelle(s) condition(s), f^{-1} est-elle dérivable ? Le cas échéant, donner l'expression de $(f^{-1})'(y)$ avec $y \in J$.
13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   (a) Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

   > Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I. Pour tout $(a,b) \in I^2$,
   > $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

   (b) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

   > Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,
   > $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

   Dans les deux cas, on prendra soin de bien préciser les hypothèses vérifiées par f.
14. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Enoncer le formule de Leibniz.

   > Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et
   > $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x-4)}\right)$.

La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on résout donc $\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{x}(5x-4)} > 0$.
Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est ici au dénominateur, le domaine de f va être inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Etudions le signe de $3x^2 - 4x + 1$. Le discriminant vaut 4, le polynôme a donc deux racines 1 et $\frac{1}{3}$.
De plus $5x - 4 > 0 \iff x > \frac{4}{5}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x} > 0$.
On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{5}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$5x - 4$			$-$		0		$+$		
$\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x-4)}$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

La fonction f est donc définie sur $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}\right[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 3

On considère l'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p((x, y, z)) = (y, y, z)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soient $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} p(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= p((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda y_1 + y_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(y_1, y_1, z_1) + (y_2, y_2, z_2) \\ &= \lambda p((x_1, y_1, z_1)) + p((x_2, y_2, z_2)). \end{aligned}$$

L'application p est bien linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que p est un projecteur.

Montrons que $p \circ p = p$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (p \circ p)(x, y, z) &= p((y, y, z)) \\ &= (y, y, z) = p((x, y, z)) \end{aligned}$$

L'application p est bien un projecteur.

3. Déterminer ses caractéristiques.

Déterminons $\mathrm{Im}(p)$. La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p((1, 0, 0)), p((0, 1, 0)), p((0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Déterminons $\mathrm{Ker}(p)$. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p((x, y, z)) = (0, 0, 0)$. Soit $(y, y, z) = (0, 0, 0)$, on a donc :

$$\mathrm{Ker}(p) = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0)).$$

En résumé, p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}$ avec $x \in \mathbb{R}$

> On doit distinguer deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.
> Si $x = 0$ alors $S_1 = n + 1$.
> Si $x \neq 0$ alors $\mathrm{e}^x \neq 1$ et on a :
>
> $$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^x)^k \\ &= \frac{1 - (\mathrm{e}^x)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

2. $S_2 = \sum_{k=1}^{2n} (k-1)^2$

> Avant de calculer S_2 effectuons le changement de variables $i = k - 1$, on a alors : $S_2 = \sum_{i=0}^{2n-1} i^2$. On peut alors en déduire la valeur de S_2 grâce aux sommes usuelles :
>
> $$S_2 = \frac{(2n-1)(2n-1+1)(2(2n-1)+1}{6} = \frac{2n(2n-1)(4n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3}$$

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 - 5k^2 + 3k}{k}$

> On a :
>
> $$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k} - \frac{5k^2}{k} + \frac{3k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 5k + 3 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) + 18n}{6} \\ &= n\frac{(n+1)(2n+1) - 15(n+1) + 18}{6} \\ &= n\frac{2n^2 + 3n + 1 - 15n - 15 + 18}{6} \\ &= n\frac{2n^2 - 12n + 4}{6} \\ &= \frac{n(n^2 - 6n + 2)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 5

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.

> On a $X(\Omega) = [\![0;3]\!]$.

2. Donner la loi de probabilité de X.

> Notons B_k et N_k les évènements « la k-ième boule tirée est blanche » et « la k-ième boule tirée est noire ».
> D'après la formule des probabilités composées, on a :
>
> $$P(X=0) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$
>
> D'après la formule des probabilités totales, on a :
>
> $$\begin{aligned} P(X=1) &= P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{6}{35} + \frac{6}{35} + \frac{6}{35} \\ &= \frac{18}{35} \end{aligned}$$
>
> D'après la formule des probabilités totales, on a :
>
> $$\begin{aligned} P(X=2) &= P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} \\ &= \frac{12}{35} \end{aligned}$$
>
> Enfin, d'après la formule des probabilités composées
>
> $$P(X=3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$
>
> Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :
>
> | x | 0 | 1 | 2 | 3 |
> |---|---|---|---|---|
> | $\mathbb{P}(X=x)$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{1}{35}$ |

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

> On a donc :
> $$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$
> Par ailleurs, on a :
> $$E(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{35} + 1^2 \times \frac{18}{35} + 2^2 \times \frac{12}{35} + 3^2 \times \frac{1}{35} = \frac{75}{35} = \frac{15}{7}$$
> Donc, d'après la formule de König-Huygens,
>
> $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{107}{49} - \frac{81}{49} = \frac{26}{49}$$

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est-elle inversible ? Le cas échéant, calculer son inverse.

On utilise la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. On en déduit que A inversible. Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3, L_2 \leftarrow -4L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1,\, L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2,\, L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Simplifier l'expression suivante :

$$B = \ln\left((x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)^{2/(3e^{\ln(1)})}$$

$$B = \frac{1}{3}\ln(x-1)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\ln\left((x-1)(x+1)\right) = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

Exercice 8

Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ et en déterminer une base.

On remarque qu'on peut écrire F sous la forme suivante :

$$F = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + c = 0, \quad 2a + b = 0\right\}$$

soit

$$F = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c = a, \quad b = -2a\right\}$$

soit

$$F = \left\{ax^2 - 2ax + a \in \mathbb{R}_2[x] \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

ainsi

$$F = \left\{a(x^2-2x+1) \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

donc

$$F = \mathrm{Vect}(x^2-2x+1).$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.
On peut également en déduire que la famille (x^2-2x+1) est génératrice de F. Comme elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est libre ainsi c'est une base de F.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

La fonction $t \mapsto \frac{-1}{t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = \frac{2}{t^3}\mathrm{e}^{-\dfrac{1}{t^2}}.$$

La fonction $t \mapsto 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, f'(t) = 0.$$

Etudions donc la dérivabilité de f en 0. On a :

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{0-0}{t} = 0$$

et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{t}$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = \dfrac{\frac{1}{t}}{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{t}\right)^2}} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^{X^2}}$ en posant $X = \frac{1}{t}$. Or $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^{X^2}} = 0$ par croissance comparée donc par composée

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
On a donc

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3}\mathrm{e}^{-\dfrac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 10

Calculer l'intégrale suivante en posant le changement de variables $t = \mathrm{e}^x$.

$$I = \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x}\,\mathrm{d}x \quad \text{en posant } t = e^x$$

Posons $t = u(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
Si $x = 1$, $t = \mathrm{e}$ et si $x = 2$, $t = \mathrm{e}^2$.
On a également :

$$\frac{e^{2x}}{1-e^x}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$

Calculons cette intégrale :

$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{t-1+1}{1-t}\mathrm{dt} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -1 + \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = [-t + \ln|1-t|]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = -\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + \ln(\mathrm{e}^2 - 1) - \ln(\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e}(1-\mathrm{e}) + \ln(\mathrm{e}+1)$$