

Interrogation n° 1

Exercice 1 *Question de cours*

Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a .

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{178 + 2}{1258 + 2}$$

$$B = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{15}{2}}$$

2. Simplifier le nombre suivant : $\frac{16^3 \times 2^{-2} \times 9 \times 1}{8^7 \times 2^{-4}} \times \left(\frac{2^3}{27^2}\right)^5$.
3. Simplifier l'écriture du nombre suivant : $\sqrt{32} - 3\sqrt{50}$.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante

$$\frac{3x}{3x+2} + \frac{2}{6x+4} + \frac{1}{x} \leq 1.$$

Exercice 4

1. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :
 - (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
 - (b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Nier les assertions ci-dessus. On écrira la négation sous deux formes : en français **et** avec des quantificateurs.

Corrigé : Interrogation n° 1

Exercice 1 Question de cours

Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a .

Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du signe du discriminant Δ . Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines et on obtient les tableaux de signe :

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $ax^2 + bx + c$	+	0	-	0	+

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $ax^2 + bx + c$	-	0	+	0	-

- Si $\Delta < 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a .
- Si $\Delta = 0$, T possède une unique racine x_0 et alors T est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{178 + 2}{1258 + 2}$$

$$A = \frac{178 + 2}{1258 + 2} = \frac{180}{1260} = \frac{18}{126} = \frac{2 \times 9}{2 \times 63} = \frac{9}{9 \times 7} = \frac{1}{7}.$$

$$B = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{15}{2}}$$

$$B = \frac{\frac{1 \times 3 \times 4}{4 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2 \times 3 \times 2}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3+5}{15}}{\frac{4-25}{20}} = \frac{\frac{8}{15}}{-\frac{21}{20}} = -\frac{8}{15} \times \frac{20}{21} = -\frac{8 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 21} = -\frac{32}{63}$$

2. Simplifier le nombre suivant : $\frac{16^3 \times 2^{-2} \times 9 \times 1}{8^7 \times 2^{-4}} \times \left(\frac{2^3}{27^2}\right)^5$.

$$\frac{16^3 \times 2^{-2} \times 9 \times 1}{8^7 \times 2^{-4}} \times \left(\frac{2^3}{27^2}\right)^5 = \frac{(2^4)^3 \times 2^{-2} \times 3^2 \times 2^{15}}{(2^3)^7 \times 2^{-4} \times (3^3)^{10}} = \frac{2^{12-2+15} \times 3^2}{2^{21-4} \times 3^{30}} = \frac{2^{25} \times 3^2}{2^{17} \times 3^{30}} = \frac{2^8}{3^{28}}$$

3. Simplifier l'écriture du nombre suivant : $\sqrt{32} - 3\sqrt{50}$.

$$\sqrt{32} - 3\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 16} - 3\sqrt{2 \times 25} = 4\sqrt{2} - 3 \times 5 \times \sqrt{2} = -11\sqrt{2}.$$

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante

$$\frac{3x}{3x+2} + \frac{2}{6x+4} + \frac{1}{x} \leq 1.$$

On commence par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Les valeurs interdites vérifient $3x+2=0$, $6x+4=0$ et $x=0$. Ainsi les valeurs interdites sont $-\frac{2}{3}$ et 0 . Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$, résolvons donc l'inéquation. On a

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3x+2} + \frac{1}{3x+2} + \frac{1}{x} - 1 &\leq 0 \\ \frac{3x \times x}{x(3x+2)} + \frac{x}{x(3x+2)} + \frac{3x+2}{x(3x+2)} - \frac{x(3x+2)}{x(3x+2)} &\leq 0 \\ \frac{3x^2 + x + 3x + 2 - 3x^2 - 2x}{x(3x+2)} &\leq 0 \\ \frac{2x+2}{x(3x+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

On dresse ensuite le tableau de signes de l'expression $\frac{2x+2}{x(3x+2)}$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$	
$2x+2$		-	0	+		
$3x+2$			-	0	+	
x			-	0	+	
$\frac{2x+2}{x(3x+2)}$		-	0	+	-	+

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty, -1] \cup]-\frac{2}{3}, 0[$.

Exercice 4

1. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

(b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

2. Nier les assertions ci-dessus. On écrira la négation sous deux formes : en français **et** avec des quantificateurs.

(a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$$

(b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

$$\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$