Interrogation n° 1

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a.
2. (a) Quelle est la quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?
   (b) Simplifier l'expression suivante (pour qu'il n'y ait plus de racines au dénominateur).
$$A = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}.$$

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.
$$A = \frac{418 + 2}{526 + 2}$$
$$B = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} \times \frac{20}{3}}{\frac{6}{7} \times \frac{21}{3} - \frac{1}{3}}$$
2. Simplifier les nombres suivants :
$$A = \frac{8^2 \times 27^2 \times 25^4}{2^7 \times 9 \times 15^3}$$
$$B = \sqrt{180}$$

Exercice 3

1. Factoriser au maximum l'expression suivante :
$$A = 5(x - 1)(2x - 4) - (4x^2 - 16).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$\text{(I)} \quad \frac{3x + 2}{2x - 1} - x \leq \frac{x}{4x - 2}.$$

Exercice 4

Ecrire avec des quantificateurs que : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante ».

Corrigé : Interrogation n° 1

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a.

> Voir cours

2. (a) Quelle est la quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

> La quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

(b) Simplifier l'expression suivante (pour qu'il n'y ait plus de racines au dénominateur).

$$A = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}.$$

> $$A = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{418 + 2}{526 + 2}$

> $$A = \frac{420}{528} = \frac{42 \times 5 \times 2}{2 \times 264} = \frac{2 \times 3 \times 7 \times 5}{2 \times 132} = \frac{3 \times 7 \times 5}{4 \times 3 \times 11} = \frac{35}{44}$$

$B = \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{10} \times \dfrac{20}{3}}{\dfrac{6}{7} \times \dfrac{21}{3} - \dfrac{1}{3}}$

> $$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{5}{8} - \frac{2}{3}}{6 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{15}{24} - \frac{16}{24}}{\frac{18-1}{3}} \\ &= -\frac{\frac{1}{24}}{\frac{17}{3}} = -\frac{1}{24} \times \frac{3}{17} \\ &= -\frac{1}{8 \times 17} = -\frac{1}{136} \end{aligned}$$

2. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{8^2 \times 27^2 \times 25^4}{2^7 \times 9 \times 15^3}$$

> $$A = \frac{(2^3)^2 \times (3^3)^2 \times (5^2)^4}{2^7 \times 3^2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{2^6 \times 3^6 \times 5^8}{2^7 \times 3^2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{2^6}{2^7} \times \frac{3^6}{3^5} \times \frac{5^8}{5^3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5^5 = \frac{3 \times 5^5}{2}.$$

$$B = \sqrt{180}$$

> $$B = \sqrt{2 \times 90} = \sqrt{4 \times 45} = 2\sqrt{9 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

Exercice 3

1. Factoriser au maximum l'expression suivante :

$$A = 5(x-1)(2x-4) - (4x^2 - 16).$$

> $$\begin{aligned} A &= 5(x-1)(2x-4) - (2x-4)(2x+4) = (2x-4)[5(x-1) - (2x+4)] \\ &= 2(x-2)(5x - 5 - 2x - 4) = 2(x-2)(3x-9) = 6(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\text{(I)} \quad \frac{3x+2}{2x-1} - x \leq \frac{x}{4x-2}.$$

> Commençons par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Elle est définie pour les réels x vérifiant $2x - 1 \neq 0$ et $4x - 2 \neq 0$ soit $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Elle est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
>
> Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on a :
>
> $$\text{(I)} \iff \frac{3x+2}{2x-1} - x - \frac{x}{4x-2} \leq 0 \iff \frac{2(3x+2) - x(4x-2) - x}{4x-2} \leq 0 \iff \frac{-4x^2 + 7x + 4}{4x-2} \leq 0.$$
>
> Pour étudier le signe de ce quotient, nous devons étudier le signe du numérateur et du dénominateur.
> Pour le numérateur, commençons par calculer le discriminant Δ. On a :
>
> $$\Delta = 49 - 4 \times (-4) \times 4 = 113.$$
>
> Calculons ensuite les deux racines :
>
> $$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{113}}{-8} = \frac{7 - \sqrt{113}}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{113}}{8}.$$
>
> On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{113}}{8}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7+\sqrt{113}}{8}$		$+\infty$
$4x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x^2+7x+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-4x^2+7x+4}{4x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

> On a alors : $\mathscr{S} = \left[\frac{7-\sqrt{113}}{8}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{7+\sqrt{113}}{8}, +\infty\right[$.

Exercice 4

Ecrire avec des quantificateurs que : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ».

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$

