Interrogation n° 1

Exercice 1 *Question de cours*

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a.

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{178+2}{1258+2}$$

$$B = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{15}{2}}$$

2. Simplifier le nombre suivant : $\dfrac{16^3 \times 2^{-2} \times 9 \times 1}{8^7 \times 2^{-4}} \times \left(\dfrac{2^3}{27^2}\right)^5$.
3. Simplifier l'écriture du nombre suivant : $\sqrt{32} - 3\sqrt{50}$.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation suivante
$$\frac{3x}{3x+2} + \frac{2}{6x+4} + \frac{1}{x} = 1.$$
2. Résoudre l'inéquation suivante
$$\sqrt{2+x} \leq 3.$$

Exercice 4

1. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Nier les assertions ci-dessus. On écrira la négation sous deux formes : en français **et** avec des quantificateurs.

Corrigé : Interrogation n° 1

Exercice 1 *Question de cours*

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Donner le signe de T en fonction de a.

Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du signe du discriminant Δ. Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines et on obtient les tableaux de signe :

Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cas $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si $\Delta < 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a.
- Si $\Delta = 0$, T possède une unique racine x_0 et alors T est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Exercice 2

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{178 + 2}{1258 + 2}$$

$$A = \frac{178 + 2}{1258 + 2} = \frac{180}{1260} = \frac{18}{126} = \frac{2 \times 9}{2 \times 63} = \frac{9}{9 \times 7} = \frac{1}{7}.$$

$$B = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{15}{2}}$$

$$B = \frac{\frac{1 \times 3 \times 4}{4 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{3 \times 5}{2 \times 3 \times 2}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{3+5}{15}}{\frac{4-25}{20}} = \frac{\frac{8}{15}}{-\frac{21}{20}} = -\frac{8}{15} \times \frac{20}{21} = -\frac{8 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 21} = -\frac{32}{63}$$

2. Simplifier le nombre suivant : $\dfrac{16^3 \times 2^{-2} \times 9 \times 1}{8^7 \times 2^{-4}} \times \left(\dfrac{2^3}{27^2}\right)^5$.

$$\frac{16^3\times 2^{-2}\times 9\times 1}{8^7\times 2^{-4}}\times\left(\frac{2^3}{27^2}\right)^5=\frac{(2^4)^3\times 2^{-2}\times 3^2\times 2^{15}}{(2^3)^7\times 2^{-4}\times (3^3)^{10}}=\frac{2^{12-2+15}\times 3^2}{2^{21-4}\times 3^{30}}=\frac{2^{25}\times 3^2}{2^{17}\times 3^{30}}=\frac{2^8}{3^{28}}.$$

3. Simplifier l'écriture du nombre suivant : $\sqrt{32}-3\sqrt{50}$.

$$\sqrt{32}-3\sqrt{50}=\sqrt{2\times 16}-3\sqrt{2\times 25}=4\sqrt{2}-3\times 5\times\sqrt{2}=-11\sqrt{2}.$$

Exercice 3

1. Résoudre l'équation suivante
$$\frac{3x}{3x+2}+\frac{2}{6x+4}+\frac{1}{x}=1.$$

On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation. Les valeurs interdites vérifient $3x+2=0$, $6x+4=0$ et $x=0$. Ainsi les valeurs interdites sont $-\frac{2}{3}$ et 0. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-\frac{2}{3}\}$, résolvons donc l'équation. On a

$$\begin{aligned}\frac{3x}{3x+2}+\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{x}-1&=0\\ \frac{3x\times x}{x(3x+2)}+\frac{x}{x(3x+2)}+\frac{3x+2}{x(3x+2)}-\frac{x(3x+2)}{x(3x+2)}&=0\\ \frac{3x^2+x+3x+2-3x^2-2x}{x(3x+2)}&=0\\ \frac{2x+2}{x(3x+2)}&=0\end{aligned}$$

Un quotient est nul ssi son numérateur est nul ainsi $2x+2=0$ et donc $x=-1$. On vérifie que $-1\in\mathbb{R}\setminus\{0,-\frac{2}{3}\}$. Ainsi $\mathscr{S}=\{-1\}$.

2. Résoudre l'inéquation suivante
$$\sqrt{2+x}\leq 3.$$

On commence par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Il faut que $2+x\geq 0$ pour que la racine soit bien définie, ainsi l'inéquation est définie pour $x\in[-2;+\infty[$.
Soit $x\in[-2;+\infty[$, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{2+x}\leq 3\iff 2+x\leq 9\iff x\leq 7.$$

Ainsi $\mathscr{S}=[-2;7]$.

Exercice 4

1. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

$$\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},u_n\leq M.$$

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}\leq u_n.$$

2. Nier les assertions ci-dessus. On écrira la négation sous deux formes : en français **et** avec des quantificateurs.

   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

   $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$$

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

   $$\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$