Interrogation n° 19

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, comment définit-on $F+G$?
2. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, que signifie que $F+G$ est une somme directe ?
3. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, que signifie que F et G sont supplémentaires dans E ?
4. Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, comment définit-on p le projecteur sur F parallèlement à G ?
5. Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I de R. Combien vaut $(fg)^{(n)}$? Citer le nom de cette formule ?
   On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f et g.

Exercice 2

On considère l'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p((x,y,z)) = (y,y,z)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer ses caractéristiques.

Corrigé : Interrogation n° 19

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, comment définit-on $F+G$?
2. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, que signifie que $F+G$ est une somme directe ?
3. Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E, que signifie que F et G sont supplémentaires dans E ?
4. Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, comment définit-on p le projecteur sur F parallèlement à G ?
5. Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I de R. Combien vaut $(fg)^{(n)}$? Citer le nom de cette formule ?
   On prendra bien soin de préciser les hypothèses vérifiées par f et g.

Exercice 2

On considère l'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p((x,y,z)) = (y,y,z)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

> Soient $(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
>
> $$\begin{aligned} p(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= p((\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2, \lambda z_1+z_2)) \\ &= (\lambda y_1+y_2, \lambda y_1+y_2, \lambda z_1+z_2) \\ &= \lambda(y_1,y_1,z_1)+(y_2,y_2,z_2) \\ &= \lambda p((x_1,y_1,z_1))+p((x_2,y_2,z_2)). \end{aligned}$$
>
> L'application p est bien linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que p est un projecteur.

> Montrons que $p \circ p = p$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
>
> $$\begin{aligned} (p \circ p)(x,y,z) &= p((y,y,z)) \\ &= (y,y,z) = p((x,y,z)) \end{aligned}$$
>
> L'application p est bien un projecteur.

3. Déterminer ses caractéristiques.

> Déterminons $\mathrm{Im}(p)$. La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a donc :
>
> $$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p((1,0,0)), p((0,1,0)), p((0,0,1)) = \mathrm{Vect}((0,0,0),(1,1,0),(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$$
>
> Déterminons $\mathrm{Ker}(p)$. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p((x,y,z)) = (0,0,0)$. Soit $(y,y,z) = (0,0,0)$, on a donc :
>
> $$\mathrm{Ker}(p) = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,0)).$$
>
> En résumé, p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,0,0))$.