Interrogation n° 19

Exercice 1

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Donner la définition de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit g l'application définie par : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - x_2 - x_3, x_2 - 2x_3) \end{array}$.

1. Montrer que l'application g est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de g.
3. Déterminer une base de l'image de g.

Corrigé : Interrogation n° 19

Exercice 1

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

2. Donner la définition de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\, y = f(x)\}$$

Exercice 2

Soit g l'application définie par : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - x_2 - x_3, x_2 - 2x_3) \end{array}$.

1. Montrer que l'application g est linéaire.

Soient $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g(\lambda X + Y) &= g\left(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3\right) = ((\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3), (\lambda x_2 + y_2) - 2(\lambda x_3 + y_3)) \\ &= \lambda(x_1 - x_2 - x_3, x_2 - 2x_3) + (y_1 - y_2 - y_3, y_2 - 2y_3) \\ &= \lambda g(X) + g(Y). \end{aligned}$$

L'application g est donc une application linéaire.

2. Déterminer une base du noyau de g.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(g)$, on a $g(X) = 0$. Cela équivaut au système linéaire suivant :

$$g(X) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & -2 & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & x_2 + x_3 \\ x_2 & = & 2x_3 \end{array} \right.$$

$$g(X) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 3x_3 \\ x_2 & = & 2x_3 \end{array} \right.$$

Ainsi les solutions du système sont de la forme $(3a, 2a, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Ker}(g) = \{(3a, 2a, a), \quad a \in \mathbb{R}\} = \{a(3, 2, 1), \quad a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((3, 2, 1)\right).$$

La famille $((3, 2, 1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, comme elle est composée d'un unique vecteur non-nul, elle est libre et c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Déterminer une base de l'image de g.

Déterminons l'image de l'application g.
La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g((1,0,0)), g((0,1,0)), g((0,0,1))).$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left((1,0),(-1,1),(-1,-2)\right).$$

On remarque que :

$$-\frac{2}{3}(-1,1) - \frac{1}{3}(-1,-2) = (1,0).$$

Donc

$$\mathrm{Vect}\left((1,0),(-1,1),(-1,-2)\right) = \mathrm{Vect}\left((-1,1),(-1,-2)\right)$$

La famille $((-1,1),(-1,-2))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g)$, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre. Cette famille est alors une base de $\mathrm{Im}(g)$.