Interrogation n° 19

Exercice 1

1. Donner la définition d'une application linéaire f de E dans F.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Donner la définition de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Montrer que l'application suivante est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Corrigé : Interrogation n° 19

Exercice 1

1. Donner la définition d'une application linéaire f de E dans F.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

   (b) Donner la définition de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, \, y = f(x)\}$$

Exercice 2

Montrer que l'application suivante est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- Montrons que f est linéaire. Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) + \lambda x_2 + y_2 - (\lambda x_3 + y_3) \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

  L'application f est bien linéaire.
- Déterminons le noyau de f. Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

  On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -2x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- Déterminons l'image de f. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

