

Interrogation n° 18

Exercice 1 Questions de cours

1. Donner la formule de König-Huygens.
2. Donner les bases canoniques des espaces vectoriels suivants :
 - (a) \mathbb{R}^2
 - (b) $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
 - (c) $\mathbb{R}_3[x]$
 - (d) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. Énoncer la propriété de croissance de l'intégrale.
4. Énoncer le théorème portant sur la somme de Riemann $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
On précisera bien les hypothèses que doit vérifier la fonction f .
5. Sous quelle(s) condition(s) la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est-elle dérivable ? Que vaut sa dérivée ?
6. Soit (A_1, A_2, A_3) un système complet d'événements, citer la formule des probabilités totales permettant de calculer $P(B)$ pour B un événement.
7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $p \in [0, 1]$.
 - (a) Donner sa loi et son support.
 - (b) Donner son espérance et sa variance.
8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[[1, n]]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Donner sa loi et son support.
 - (b) Donner son espérance et sa variance.
9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$, donner la définition de f est continue en a .
10. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , soit $a \in \mathbb{R}$, donner la définition de f est dérivable en a .
11. Soient deux fonctions f et g définies et dérivables sur \mathbb{R} . Que vaut la dérivée de $g \circ f$?
12. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective, on note f^{-1} sa bijection réciproque. Sous quelle(s) condition(s), f^{-1} est-elle dérivable ? Le cas échéant, donner l'expression de $(f^{-1})'(y)$ avec $y \in J$.
13. Soient E et F deux espaces vectoriels.
 - (a) Donner la définition d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$.
 - (b) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
 - (c) Quels sont les liens entre $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$, injectivité, surjectivité ?

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x - 4)}\right)$.

Exercice 3

$$f: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

On considère l'application $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'application suivante est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f .
3. Déterminer une base l'image de f .

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n e^{kx}$ avec $x \in \mathbb{R}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{2n} (k-1)^2$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{k^3 - 5k^2 + 3k}{k}$

Exercice 5

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X .
2. Donner la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire compris entre 0 et 1.
 - (a) Ecrire une fonction Python permettant de simuler le tirage d'une seule boule dans cette urne.
 - (b) On suppose maintenant que l'urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. Ecrire une fonction Python permettant de simuler le tirage d'une seule boule dans cette urne.

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est-elle inversible? Le cas échéant, calculer son inverse.

Exercice 7

Simplifier l'expression suivante :

$$B = \ln \left((x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}} \right) - \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1)^{2/(3e^{\ln(1)})}$$

Exercice 8

Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ et en déterminer une base.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .

Exercice 10

Calculer l'intégrale suivante en posant le changement de variables $t = e^x$.

$$I = \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx \quad \text{en posant } t = e^x$$

Indication : On pourra utiliser astucieusement le fait que $t = t - 1 + 1$.

Corrigé : Interrogation n° 18

Exercice 1 Questions de cours

1. Donner la formule de König-Huygens.
2. Donner les bases canoniques des espaces vectoriels suivants :
 - (a) \mathbb{R}^2
 - (b) $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
 - (c) $\mathbb{R}_3[x]$
 - (d) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. Enoncer la propriété de croissance de l'intégrale.
4. Enoncer le théorème portant sur la somme de Riemann $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
On précisera bien les hypothèses que doit vérifier la fonction f .

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ alors $(S_n)_n$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$.

5. Sous quelle(s) condition(s) la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est-elle dérivable ? Que vaut sa dérivée ?
6. Soit (A_1, A_2, A_3) un système complet d'événements, citer la formule des probabilités totales permettant de calculer $P(B)$ pour B un événement.
7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $p \in [0, 1]$.
 - (a) Donner sa loi et son support.
 - (b) Donner son espérance et sa variance.
8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[[1, n]]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Donner sa loi et son support.
 - (b) Donner son espérance et sa variance.
9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$, donner la définition de f est continue en a .
10. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , soit $a \in \mathbb{R}$, donner la définition de f est dérivable en a .
11. Soient deux fonctions f et g définies et dérivables sur \mathbb{R} . Que vaut la dérivée de $g \circ f$?
12. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective, on note f^{-1} sa bijection réciproque. Sous quelle(s) condition(s), f^{-1} est-elle dérivable ? Le cas échéant, donner l'expression de $(f^{-1})'(y)$ avec $y \in J$.
13. Soient E et F deux espaces vectoriels.
 - (a) Donner la définition d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$.
 - (b) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
 - (c) Quels sont les liens entre $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$, injectivité, surjectivité ?

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x - 4)}\right)$.

La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* , on résout donc $\frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x - 4)} > 0$.

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur \mathbb{R}_+ et est ici au dénominateur, le domaine de f va être inclus dans \mathbb{R}_+^* .

Étudions le signe de $3x^2 - 4x + 1$. Le discriminant vaut 4, le polynôme a donc deux racines 1 et $\frac{1}{3}$.

De plus $5x - 4 > 0 \iff x > \frac{4}{5}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} > 0$.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$+\infty$	
$3x^2 - 4x + 1$		+	0	-	0	+
$5x - 4$			-	0	+	
$\frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x}(5x - 4)}$		-	+	-	+	

La fonction f est donc définie sur $\left] \frac{1}{3}, \frac{4}{5} \right[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 3

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

On considère l'application
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

1. Montrer que l'application suivante est linéaire.

Montrons que f est linéaire. Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) &= f \left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) + \lambda x_2 + y_2 - (\lambda x_3 + y_3) \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + f \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) . \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire.

2. Déterminer une base du noyau de f .

Déterminons le noyau de f . Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$ alors $f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

3. Déterminer une base l'image de f .

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n e^{kx}$ avec $x \in \mathbb{R}$

On doit distinguer deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

Si $x = 0$ alors $S_1 = n + 1$.

Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et on a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^n (e^x)^k \\ &= \frac{1 - (e^x)^{n+1}}{1 - e^x} \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}. \end{aligned}$$

2. $S_2 = \sum_{k=1}^{2n} (k-1)^2$

Avant de calculer S_2 effectuons le changement de variables $i = k - 1$, on a alors : $S_2 = \sum_{i=0}^{2n-1} i^2$. On peut alors en déduire la valeur de S_2 grâce aux sommes usuelles :

$$S_2 = \frac{(2n-1)(2n-1+1)(2(2n-1)+1)}{6} = \frac{2n(2n-1)(4n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3}$$

3. $S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{k^3 - 5k^2 + 3k}{k}$

On a :

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{k} - \frac{5k^2}{k} + \frac{3k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 - 5k + 3 \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k + 3 \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) + 18n}{6} \\
 &= n \frac{(n+1)(2n+1) - 15(n+1) + 18}{6} \\
 &= n \frac{2n^2 + 3n + 1 - 15n - 15 + 18}{6} \\
 &= n \frac{2n^2 - 12n + 4}{6} \\
 &= \frac{n(n^2 - 6n + 2)}{3}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

- Déterminer le support de X .

On a $X(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$.

- Donner la loi de probabilité de X .

Notons B_k et N_k les événements « la k -ième boule tirée est blanche » et « la k -ième boule tirée est noire ».
D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X = 0) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X = 1) &= P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) \\
 &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{6}{35} + \frac{6}{35} + \frac{6}{35} \\
 &= \frac{18}{35}
 \end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} \\ &= \frac{12}{35} \end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités composées

$$P(X = 3) = P(\overline{B_1}) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

3. Calculer l'espérance et la variance de X .

On a donc :

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

Par ailleurs, on a :

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{35} + 1^2 \times \frac{18}{35} + 2^2 \times \frac{12}{35} + 3^2 \times \frac{1}{35} = \frac{75}{35} = \frac{15}{7}$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{105}{49} - \frac{81}{49} = \frac{24}{49}$$

4. On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire compris entre 0 et 1.

(a) Ecrire une fonction Python permettant de simuler le tirage d'une seule boule dans cette urne.

On peut par exemple écrire :

```
def urne():
    y=rd.binomial(1,3/7)
    if y==1 :
        return 'boule blanche'
    else :
        return 'boule noire'
```

(b) On suppose maintenant que l'urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. Ecrire une fonction Python permettant de simuler le tirage d'une seule boule dans cette urne.

On peut par exemple écrire :

```
def urne():
    y=rd.random()
    if y<3/12 :
        return 'boule blanche'
    elif 3/12<y<7/12 :
        return 'boule noire'
    else :
```

```
return 'boule rouge'
```

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est-elle inversible ? Le cas échéant, calculer son inverse.

On utilise la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. On en déduit que A est inversible. Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3, L_2 \leftarrow -4L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2, L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Simplifier l'expression suivante :

$$B = \ln \left((x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}} \right) - \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1)^{2/(3e^{\ln(1)})}$$

$$B = \frac{1}{3} \ln(x-1)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \ln((x-1)(x+1)) = \frac{1}{3} \left(\ln \left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right)$$

Exercice 8

Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ et en déterminer une base.

On remarque qu'on peut écrire F sous la forme suivante :

$$F = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + c = 0, \quad 2a + b = 0\}$$

soit

$$F = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c = a, \quad b = -2a\}$$

soit

$$F = \{ax^2 - 2ax + a \in \mathbb{R}_2[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$$

ainsi

$$F = \{a(x^2 - 2x + 1) \in \mathbb{R}_2[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$$

donc

$$F = \text{Vect}(x^2 - 2x + 1).$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

On peut également en déduire que la famille $(x^2 - 2x + 1)$ est génératrice de F . Comme elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est libre ainsi c'est une base de F .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .

La fonction $t \mapsto \frac{-1}{t^2}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , la fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} donc par composée, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

La fonction $t \mapsto 0$ est dérivable sur \mathbb{R}_-^* et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, \quad f'(t) = 0.$$

Etudions donc la dérivabilité de f en 0. On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}$$

Or $\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = \frac{\frac{1}{t}}{e^{(\frac{1}{t})^2}} = \frac{X}{e^{X^2}}$ en posant $X = \frac{1}{t}$. Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^{X^2}} = 0$ par croissance comparée donc par composée

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

On a donc

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 10

Calculer l'intégrale suivante en posant le changement de variables $t = e^x$.

$$I = \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx \quad \text{en posant } t = e^x$$

Indication : On pourra utiliser astucieusement le fait que $t = t - 1 + 1$.

Posons $t = u(x) = e^x$. La fonction u est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On a $dt = e^x dx$.

Si $x = 1$, $t = e$ et si $x = 2$, $t = e^2$.

On a également :

$$\frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx = \frac{e^x}{1 - e^x} e^x dx = \frac{t}{1 - t} dt$$

Ainsi

$$I = \int_e^{e^2} \frac{t}{1 - t} dt$$

Calculons cette intégrale :

$$I = \int_e^{e^2} \frac{t - 1 + 1}{1 - t} dt = \int_e^{e^2} -1 + \frac{1}{1 - t} dt = [-t - \ln |1 - t|]_e^{e^2} = -e^2 + e - \ln(e^2 - 1) + \ln(e - 1) = e(1 - e) - \ln(e + 1)$$