Corrigé : Interrogation n° 18

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Compléter le tableau suivant :

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)			
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$		$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	
En particulier si $\alpha = -2$, $\frac{1}{x^2}$		$-\frac{u'}{u^2}$	
En particulier si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$		$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	
$\frac{1}{x}$		$\frac{u'}{u}$	
e^x		$u'e^u$	
$\cos(x)$		$u'\cos(u)$	
$\sin(x)$		$u'\sin(u)$	
$\frac{1}{1+x^2}$		$\frac{u'}{1+u^2}$	

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax + C$		
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
En particulier si $\alpha = -2$, $\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + C$
En particulier si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	$u'e^u$	$e^u + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$

2. Enoncer les deux versions de l'inégalité des accroissements finis.

3. Donner les bases canoniques des espaces vectoriels suivants :
   (a) $\mathbb{R}^3$
   (b) $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
   (c) $\mathbb{R}_4[x]$
4. Enoncer la propriété de croissance de l'intégrale.
5. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, recopier et compléter :
$$|x| = a \iff \dots$$
$$|x| < a \iff \dots$$
$$|x| > a \iff \dots$$
6. Soient A et B deux événements $P(A \cup B) = \dots$
7. Soient deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Que vaut la dérivée de $f \circ g$?
8. Soit f une application de E dans F (des espaces vectoriels). Donner la définition de f est linéaire.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x\,.$

On a :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 \\ &= \frac{-15}{4} \end{aligned}$$

2. $I_3 = \displaystyle\int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$

Posons $u(x) = x^2 + x + 1$. Alors, $u'(x) = 2x + 1$ et donc $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ainsi,
$$\frac{4x+2}{x^2+x+1} = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}\,.$$
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$ est donc donnée par :
$$x \mapsto 2\ln\left|x^2 + x + 1\right|\,.$$
Et donc,
$$\begin{aligned} I_3 &= \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_2^4 \\ &= 2\ln(21) - 2\ln(7) \\ &= 2\ln(3) \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties : $I = \displaystyle\int_0^2 te^t \, \mathrm{d}t$.

Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \qquad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & e^t & & v(t) & = & e^t \end{array}$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 te^t \, \mathrm{d}t &= \int_0^2 u(t)v'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[te^t\right]_0^2 - \int_0^2 e^t \, \mathrm{d}t \\ &= 2e^2 - \left[e^t\right]_0^2 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

Exercice 4

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n.

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation caractéristique associée :

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

Cette équation se met sous la forme :

$$(2r-1)^2 = 0.$$

Ainsi elle possède une unique solution $r_0 = \dfrac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = (\lambda + n\mu)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Utilisons les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer λ et μ. On a : $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = (\lambda + \mu) \times \dfrac{1}{2} = 2$. Ainsi

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = 3.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = (1+3n)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Exercice 5

Montrer que $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a clairement $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Soit la suite nulle $(u_n)_n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 0 = n \times 0 + 0 = nu_{n+1} + u_n$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $((u_n)_n, (v_n)_n) \in F^2$, montrons que $\lambda(u_n)_n + (v_n)_n \in F$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + v_{n+2} &= \lambda(nu_{n+1} + u_n) + nv_{n+1} + v_n \quad \text{car } ((u_n)_n, (v_n)_n) \in F^2 \\ &= n(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + \lambda u_n + v_n \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda(u_n)_n + (v_n)_n \in F$.

L'espace F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6

Déterminer une base de l'espace vectoriel :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + 3y - 2z - t = 0 \right\}.$$

Commençons par déterminer une famille génératrice de F. On a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid t = x + 3y - 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+3y-2z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid t = x + 3y - 2z \right\}.$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ -2z \end{pmatrix} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3).$$

La famille est (e_1, e_2, e_3) est donc une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Cette égalité équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre et (e_1, e_2, e_3) est donc une base de F.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} \frac{3^{2k+1}}{2^k}$ et $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (k^2 - 3k + 7)$.

Indication : $3 \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 \times \frac{2}{7} = \frac{2187}{28}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n+2} 3 \times \frac{(3^2)^k}{2^k} = \sum_{k=3}^{n+2} 3 \times \left(\frac{9}{2}\right)^k = 3 \sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{9}{2}\right)^k \\
&= 3 \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+2-3+1}}{1 - \frac{9}{2}} \\
&= -3 \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 \times \frac{2}{7} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{2187}{28} \left(\left(\frac{9}{2}\right)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} 7 \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{(2n)(2n+1)(2(2n)+1)}{6} - 3 \frac{2n(2n+1)}{2} + 7 \times 2n \\
&= \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - 3n(2n+1) + 14n \\
&= \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{9n(2n+1)}{3} + \frac{14n \times 3}{3} \\
&= \frac{n}{3} \left((2n+1)(4n+1) - 9(2n+1) + 42\right) \\
&= \frac{n}{3} \left(8n^2 + 2n + 4n + 1 - 18n - 9 + 42\right) \\
&= \frac{n}{3} \left(8n^2 - 12n + 34\right)
\end{aligned}$$