# Interrogation n° 18

## Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \left(\cos(t)\right)^2 \mathrm{d}t$

## Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^{3t} \mathrm{d}t.$$

## Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables $t = \mathrm{e}^x$ :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x.$$

*Indication : on remarquera ensuite que* $\quad \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}.$

# Corrigé : Interrogation n° 18

## Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{12}2^4 + \frac{2}{3}2^3 - \frac{2^2}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{12}1^4 + \frac{2}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 1\right) \\
&= -\frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 2 + 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{10}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{40 + 1 - 6}{12} \\
&= \frac{35}{12}
\end{aligned}
$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= [\ln|\,\mathrm{e}^x + 1\,|]_{\ln(2)}^{\ln(3)} \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{\ln(3)} + 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{\ln(2)} + 1\right) \\
&= \ln(4) - \ln(3) \\
&= \ln\left(\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}
$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1 \\
&= -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{0^2}{2}} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \left(\cos(t)\right)^2 \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \left[-\frac{1}{3}(\cos(t))^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\cos(0)\right)^3 \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \\
&= -\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{4-\sqrt{2}}{12}.
\end{aligned}$$

## Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t.$$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{3t} \\ v(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} \times t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1+2\mathrm{e}^3}{9}
\end{aligned}$$

## Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables $t = \mathrm{e}^x$ :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x.$$

*Indication : on remarquera ensuite que* $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}.$

- on pose $t = \mathrm{e}^x = u(x)$ donc $x = \ln(t)$.
  La fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $x$ dans $[0;1]$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

- $t = u(x)$ donc $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
- On a :
$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)} \times \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$
- si $x = 0$ alors $t = 1$ et si $x = 1$ alors $t = \mathrm{e}$.

donc par changement de variable :
$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$
Petite astuce pour calculer cette intégrale, remarquons que :
$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)}.$$
Ainsi :
$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
donc
$$I = [\ln|t| - \ln|t+1|]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2)$$