

Interrogation n° 17

Exercice 1 Questions de cours

Énoncer les propriétés suivantes :

1. Croissance de l'intégrale
2. Relation de Chasles
3. Linéarité de l'intégrale
4. Inégalité triangulaire

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1 \right) dx$
2. $I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$
3. $I_3 = \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt$
4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) (\cos(t))^2 dt$

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 te^{3t} dt.$$

Exercice 4

Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables $t = e^x$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

Indication : on remarquera ensuite que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

Corrigé : Interrogation n° 17

Exercice 1 Questions de cours

Énoncer les propriétés suivantes :

1. Croissance de l'intégrale
2. Relation de Chasles
3. Linéarité de l'intégrale
4. Inégalité triangulaire

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1 \right) dx$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{12}2^4 + \frac{2}{3}2^3 - \frac{2^2}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{12}1^4 + \frac{2}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 1 \right) \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 2 + 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{10}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{40 + 1 - 6}{12} \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

$$2. I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\begin{aligned} I_2 &= [\ln|e^x + 1|]_{\ln(2)}^{\ln(3)} \\ &= \ln(e^{\ln(3)} + 1) - \ln(e^{\ln(2)} + 1) \\ &= \ln(4) - \ln(3) \\ &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$3. I_3 = \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^1 \\
 &= -e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{0^2}{2}} \\
 &= 1 - e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) (\cos(t))^2 dt$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \left[-\frac{1}{3}(\cos(t))^3 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^3 + \frac{1}{3} (\cos(0))^3 \\
 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4 - \sqrt{2}}{12}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 t e^{3t} dt.$$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{3t} \\ v(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{3}e^{3t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 u'(t)v(t)dt \\
 &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}e^{3t} \times t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3t}dt \\
 &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}e^{3t} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{1 + 2e^3}{9}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables $t = e^x$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

Indication : on remarquera ensuite que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

- on pose $t = e^x = u(x)$ donc $x = \ln(t)$.
La fonction $u : x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et pour tout x dans $[0; 1]$, on a $u'(x) = e^x$.
- $t = u(x)$ donc $dt = u'(x)dx$ donc $dt = e^x dx$.
- On a :

$$\frac{1}{e^x + 1} dx = \frac{1}{e^x(e^x + 1)} \times e^x dx = \frac{1}{t(t+1)} dt$$

- si $x = 0$ alors $t = 1$ et si $x = 1$ alors $t = e$.

donc par changement de variable :

$$I = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt$$

Petite astuce pour calculer cette intégrale, remarquons que :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)}.$$

Ainsi :

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

donc

$$I = [\ln |t| - \ln |t+1|]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$$