Interrogation n° 17

Exercice 1 *Question de cours*

Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

1. On considère une urne contenant 3 boules bleues et 5 boules blanches. On tire 10 boules successivement et avec remise dans l'urne, et on note X le nombre de boules blanches obtenues.
2. On considère une urne contenant 17 boules numérotées de 1 à 17. On tire une boule au hasard et on note X le numéro obtenu.
3. Parmi les 33 étudiants d'ECG1 du lycée Charles de Gaulle, un quart joue au tarot à la pause. On choisit un étudiant au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cet étudiant a effectivement joué au tarot, 0 sinon.
4. Un professeur feignant lance une copie en haut d'un escalier de 20 marches (numérotées de 1 à 20) pour obtenir la note d'un élève. On note X la note obtenue par l'élève.
5. On estime qu'il pleut environ 179 jours par an à Caen. Mme Fontaine prend son vélo 3 fois par semaine pendant les 36 semaines de cours de l'année. On note X le nombre de fois où Mme Fontaine arrive trempée au lycée.
6. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce questionnaire (c'est-à-dire qu'il choisit au hasard entre loi de Bernoulli, loi binomiale et loi uniforme). On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève.

Exercice 3

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 1$
2. $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}$
3. $f_3(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{x^3 - 3x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^3}{(x^4 + 1)^3}$
5. $f_5(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}$

Corrigé : Interrogation n° 17

Exercice 1 *Question de cours*

Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$				

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

1. On considère une urne contenant 3 boules bleues et 5 boules blanches. On tire 10 boules successivement et avec remise dans l'urne, et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

   X compte le nombre de succès (*i.e* obtenir une boule blanche) lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{5}{8}$.

2. On considère une urne contenant 17 boules numérotées de 1 à 17. On tire une boule au hasard et on note X le numéro obtenu.

   X peut prendre toutes les valeurs de 1 à 17, et de manière équiprobable. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $[\![1;17]\!]$.

3. Parmi les 33 étudiants d'ECG1 du lycée Charles de Gaulle, un quart joue au tarot à la pause. On choisit un étudiant au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cet étudiant a effectivement joué au tarot, 0 sinon.

   X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité $\dfrac{1}{4}$) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$.

4. Un professeur feignant lance une copie en haut d'un escalier de 20 marches (numérotées de 1 à 20) pour obtenir la note d'un élève. On note X la note obtenue par l'élève.

> X peut prendre toutes les valeurs de 1 à 20, et de manière équiprobable. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $[\![1;20]\!]$.

5. On estime qu'il pleut environ 179 jours par an à Caen. Mme Fontaine prend son vélo 3 fois par semaine pendant les 36 semaines de cours de l'année. On note X le nombre de fois où Mme Fontaine arrive trempée au lycée.

> X compte le nombre de succès (*i.e* arriver trempé au lycée...) lors de la répétition de 108 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 108$ et $p = \dfrac{179}{365}$.

6. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce questionnaire (c'est-à-dire qu'il choisit au hasard entre loi de Bernoulli, loi binomiale et loi uniforme). On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève.

> X compte le nombre de succès (*i.e* l'élève a la bonne réponse) lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 1$

> Une primitive de f_1 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_1(x) = 5 \times \frac{1}{5}x^5 - 3 \times \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6 \times \frac{1}{2}x^2 + x = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x.$$

2. $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}$

> La fonction f_2 semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Ainsi $u'(x) = \mathrm{e}^x$, on a alors :
>
> $$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}} = \frac{1}{2}f_2(x).$$
>
> Ainsi $f_2(x) = 2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et une primitive de f_2 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_2(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}.$$

3. $f_3(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{x^3 - 3x}$

> La fonction f_3 semble être de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^3 - 3x$ et donc $u'(x) = 3x^2 - 3$. On a alors :
>
> $$u'\mathrm{e}^u = (3x^2 - 3)\mathrm{e}^{x^3 - 3x} = 3(x^2 - 1)\mathrm{e}^{x^3 - 3x} = 3f_3(x).$$
>
> Ainsi $f_1 = \dfrac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$ et une primitive de f_1 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_3(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3 - 3x}.$$

4. $f_4(x) = \dfrac{x^3}{(x^4 + 1)^3}$

> La fonction f_4 semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = x^4 + 1$ et $\alpha = -3$. Ainsi $u'(x) = 4x^3$ et on a alors :
>
> $$u'u^\alpha = 4x^3 \times (x^4+1)^{-3} = \frac{4x^3}{(x^4+1)^3} = 4f_4(x).$$
>
> Ainsi $f_4(x) = \dfrac{1}{4}u'u^\alpha$ et une primitive de f_3 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_3(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{-3+1}(x^4+1)^{-3+1} = -\frac{1}{8}\frac{1}{(x^4+1)^2}.$$

5. $f_5(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$

> La fonction f_5 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 4$. Ainsi $u'(x) = 2x + 3$, on a alors :
>
> $$\frac{u'}{u} = \frac{2x+3}{x^2+3x+4} = f_5(x).$$
>
> Une primitive de f_4 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_5(x) = \ln|x^2 + 3x + 4|.$$
>
> Remarquons que le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est négatif et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x + 4 > 0$. Ainsi
>
> $$F_4(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$$