Interrogation n° 17

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer la formule de König-Huygens.
2. Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne gagne ni ne perd d'argent. On note X le gain (algébrique) en euros à l'issue d'un tirage.

1. Déterminer le support et la loi de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
3. On note $Y = 4X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.
4. On note $Z = X^2$.
   (a) Déterminer le support de Z.
   (b) Déterminer la loi de Z.

Corrigé : Interrogation n° 17

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Enoncer la formule de König-Huygens.
2. Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$				

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$	$\llbracket 1; n \rrbracket$	$P(X=k) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0; 1\}$	$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\llbracket 0; n \rrbracket$	$P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne gagne ni ne perd d'argent. On note X le gain (algébrique) en euros à l'issue d'un tirage.

1. Déterminer le support et la loi de X.

On a $X(\Omega) = \{-3 : -1; 0; 3\}$. De plus,

$$P(X=-3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad P(X=-1) = \frac{7}{20}, \qquad P(X=0) = \frac{3}{20}, \qquad P(X=3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

x	-3	-1	0	3	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

On a $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ ainsi

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{5} + -1 \times \frac{7}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{-1}{20}.$$

> D'après la formule de König-Huygens, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or
> $$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{7}{20} + 0^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{3}{10} = \frac{97}{20}.$$
> On en déduit $V(X) = \frac{97}{20} - \left(-\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{97}{20} - \frac{1}{400} = \frac{1939}{400}$

3. On note $Y = 4X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

> D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = 4E(X) - 1 = -\frac{4}{20} - 1 = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$.
>
> D'après les propriétés sur la variance, on a $V(Y) = 16V(X) = 16 \times \frac{1939}{400} = 4 \times \frac{1939}{100} = \frac{1939}{25}$.

4. On note $Z = X^2$.
   (a) Déterminer le support de Z.

> Les valeurs prises par Z sont obtenues en calculant les images des valeurs prises par X par l'application $h(x) = x^2$.
> Ainsi on a : $h(-3) = 9$, $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(3) = 9$.
> En conclusion, on a : $Z(\Omega) = \{0, 1, 9\}$.

   (b) Déterminer la loi de Z.

> On a :
> - $P(Z = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{3}{20}$
> - On a :
> $$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X^2 = 1) \\ &= P([X = 1] \cup [X = -1]) \\ &= P(X = 1) + P(X = -1) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\ &= 0 + \frac{7}{20} \\ &= \frac{7}{20}. \end{aligned}$$
> - On a :
> $$\begin{aligned} P(Z = 9) &= P(X^2 = 9) \\ &= P([X = 3] \cup [X = -3]) \\ &= P(X = 3) + P(X = -3) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
>
> On vérifie que l'on a bien $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 9) = 1$.

