

Interrogation n° 15

Exercice 1 Questions de cours

1. Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

2. Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (en justifiant soigneusement).

(a) **Tirs au but**

Un joueur de football tire 20 penalties. La probabilité qu'il marque un but à chaque tir est de 0,75. On note X la variable aléatoire égale au nombre de buts marqués.

(b) **Participation à un marathon**

On estime que 12% des adultes d'une ville participent au marathon annuel. On choisit un adulte au hasard dans cette ville et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette personne participe au marathon, 0 sinon.

(c) **Tirage au sort d'un numéro de dossard**

Lors d'une course à pied, 100 dossards sont distribués, numérotés de 1 à 100. Un coureur choisit un dossard au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dossard choisi.

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne gagne ni ne perd d'argent. On note X le gain (algébrique) en euros à l'issue d'un tirage.

1. Déterminer le support et la loi de X .

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

3. On note $Y = 4X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y .

4. On note $Z = X^2$.

(a) Déterminer le support de Z .

(b) Déterminer la loi de Z .

Corrigé : Interrogation n° 15

Exercice 1 Questions de cours

1. Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$

2. Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (en justifiant soigneusement).

(a) **Tirs au but**

Un joueur de football tire 20 penalties. La probabilité qu'il marque un but à chaque tir est de 0,75. On note X la variable aléatoire égale au nombre de buts marqués.

On appelle succès « marquer un but » de probabilité 0,75. On répète 20 fois de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli associée. Donc, X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,75$.

(b) **Participation à un marathon**

On estime que 12% des adultes d'une ville participent au marathon annuel. On choisit un adulte au hasard dans cette ville et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette personne participe au marathon, 0 sinon.

X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité 0,12) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,12$.

(c) **Tirage au sort d'un numéro de dossard**

Lors d'une course à pied, 100 dossards sont distribués, numérotés de 1 à 100. Un coureur choisit un dossard au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dossard choisi.

X peut prendre toutes les valeurs de 1 à 100, et de manière équiprobable. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 100 \rrbracket$.

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne gagne ni ne perd d'argent. On note X le gain (algébrique) en euros à l'issue d'un tirage.

1. Déterminer le support et la loi de X .

On a $X(\Omega) = \{-3; -1; 0; 3\}$. De plus,

$$P(X = -3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad P(X = -1) = \frac{7}{20}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{20}, \quad P(X = 3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

x	-3	-1	0	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

On a $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ ainsi

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{5} + -1 \times \frac{7}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{-1}{20}.$$

D'après la formule de König-Huygens, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{7}{20} + 0^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{3}{10} = \frac{97}{20}.$$

$$\text{On en déduit } V(X) = \frac{97}{20} - \left(-\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{97}{20} - \frac{1}{400} = \frac{1939}{400}$$

3. On note $Y = 4X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y .

D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = 4E(X) - 1 = -\frac{4}{20} - 1 = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$.

D'après les propriétés sur la variance, on a $V(Y) = 16V(X) = 16 \times \frac{1939}{400} = 4 \times \frac{1939}{100} = \frac{1939}{25}$.

4. On note $Z = X^2$.

- (a) Déterminer le support de Z .

Les valeurs prises par Z sont obtenues en calculant les images des valeurs prises par X par l'application $h(x) = x^2$.
Ainsi on a : $h(-3) = 9$, $h(-1) = 1$, $h(0) = 0$ et $h(3) = 9$.
En conclusion, on a : $Z(\Omega) = \{0, 1, 9\}$.

- (b) Déterminer la loi de Z .

On a :

- $P(Z = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{3}{20}$

- On a :

$$\begin{aligned}P(Z = 1) &= P(X^2 = 1) \\&= P([X = 1] \cup [X = -1]) \\&= P(X = 1) + P(X = -1) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\&= 0 + \frac{7}{20} \\&= \frac{7}{20}.\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}P(Z = 9) &= P(X^2 = 9) \\&= P([X = 3] \cup [X = -3]) \\&= P(X = 3) + P(X = -3) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\&= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\&= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 9) = 1$.