

Interrogation n° 16

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient deux variables aléatoires X et Y et deux nombres réels a et b . Compléter les assertions suivantes :

- $E(X + Y) = \dots$
- $E(aX + b) = \dots$
- $V(aX + b) = \dots$

2. Laquelle des deux formules suivantes est-elle juste ? Comme s'appelle-t-elle ?

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = E(X)^2 - E(X^2)$$

Exercice 2

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Pour jouer une partie, on doit miser 2 euros. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 10, on gagne 10 euros, si on tire un numéro multiple de 3, on gagne 3 euros si on tire un multiple de 2 (qui n'est pas un multiple de 3 ni le 10), on gagne 2 euros et rien sinon. On note X le gain algébrique.

1. Déterminer le support et la loi de X .
2. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer la variance de X . Combien vaut l'écart-type ?

Corrigé : Interrogation n° 16

Exercice 1 Questions de cours

1. Soient deux variables aléatoires X et Y et deux nombres réels a et b . Compléter les assertions suivantes :

- $E(X + Y) = \dots$
- $E(aX + b) = \dots$
- $V(aX + b) = \dots$

2. Laquelle des deux formules suivantes est-elle juste ? Comme s'appelle-t-elle ?

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = E(X)^2 - E(X^2)$$

Exercice 2

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Pour jouer une partie, on doit miser 2 euros. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 10, on gagne 10 euros, si on tire un numéro multiple de 3, on gagne 3 euros si on tire un multiple de 2 (qui n'est pas un multiple de 3 ni le 10), on gagne 2 euros et rien sinon. On note X le gain algébrique.

1. Déterminer le support et la loi de X .

On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 1, 8\}$. De plus,

$$P(X = -2) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 8) = \frac{1}{10}$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

x	-2	0	1	8	Total
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

2. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?

On a :

$$E(X) = -2 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 8 \times \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

On $E(X) > 0$, le gain est en moyenne positif, le jeu est donc favorable au joueur.

3. Calculer la variance de X . Combien vaut l'écart-type ?

D'après la formule de König-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Commençons par calculer le moment d'ordre 2 de X , on a :

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{3}{10} + 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 8^2 \times \frac{1}{10} = \frac{79}{10}.$$

On en déduit :

$$V(X) = \frac{79}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{153}{20}.$$

On a alors l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{153}{20}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt{5}}$.