Interrogation n° 16

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en a.
2. Enoncer le théorème de prolongement de la dérivée.
3. Enoncer l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).

Exercice 2

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{e}^x & \text{si} & x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 3

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leq |x|$.

Corrigé : Interrogation n° 16

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en a.
2. Enoncer le théorème de prolongement de la dérivée.
3. Enoncer l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).

Exercice 2

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} e^x & \text{si} & x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.

> On a $f(0) = 0^1 + 1 = 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc la fonction f est continue en 0.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

> Etudions les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en 0.
> A gauche, on a :
> $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x - 0}.$$
> On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $g(x) = e^x$ qui est dérivable en 0 et qui vérifie $g'(0) = 1$.
> On a alors $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. La fonction f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$.
> A droite, on a :
> $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$
> La fonction f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 0$.
> En conclusion $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leq |x|$.

> Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(t)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\sin(t)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq 1$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
> $$|\cos(x) - \cos(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$
> soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leq |x|$.