

## Interrogation n° 15

### Exercice 1 Questions de cours

1. Énoncer le théorème de prolongement de la dérivée.
2. Énoncer l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).
3. Soit  $X$  une variable aléatoire finie, donner la définition de l'espérance de  $X$ .
4. Énoncer la formule de König-Huygens.
5. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements, donner la définition de  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  est un système complet d'événements.

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par morceaux

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \\ e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que  $f$  est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

### Exercice 3

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - 1| \leq |x|$ .

## Corrigé : Interrogation n° 15

### Exercice 1 Questions de cours

1. Enoncer le théorème de prolongement de la dérivée.
2. Enoncer l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).
3. Soit  $X$  une variable aléatoire finie, donner la définition de l'espérance de  $X$ .
4. Enoncer la formule de König-Huygens.
5. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements, donner la définition de  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  est un système complet d'événements.

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par morceaux

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \\ e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que  $f$  est continue en 0.

On a  $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  donc la fonction  $f$  est continue en 0.

2. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

Étudions les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de  $f$  en 0.

À gauche, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x - 0}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction  $g(x) = e^x$  qui est dérivable en 0 et qui vérifie  $g'(0) = 1$ .

On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ . La fonction  $f$  est dérivable à gauche de 0 et  $f'_g(0) = 1$ .

À droite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

La fonction  $f$  est dérivable à droite de 0 et  $f'_d(0) = 0$ .

En conclusion  $f'_g(0) \neq f'_d(0)$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### Exercice 3

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - 1| \leq |x|$ .

Posons pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos(t)$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = -\sin(t)$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(t)| \leq 1$ . Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|\cos(x) - \cos(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$

soit  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - 1| \leq |x|$ .