Interrogation n° 15

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en a.
2. Donner la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} 1+x & \text{si} & x \geq 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes, déterminer leur domaine de définition, justifier leur dérivabilité et calculer leur dérivée.

1. $f_1(x) = \sin\left(\dfrac{3x-5}{2x+7}\right)$
2. $f_2(x) = x^2 \ln(3x^2+2)$

Corrigé : Interrogation n° 15

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en a.
2. Donner la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{lll} 1+x & \text{si} & x \geq 0 \\ e^x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.

> Etudions les limites de f à gauche et à droite de 0.
> **Limite à gauche de 0**
> Pour $x < 0$, on a $f(x) = e^x$, ainsi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$.
> **Limite à droite de 0**
> Pour $x > 0$, on a $f(x) = 1 + x$, ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 + x) = 1 + 0 = 1$.
> De plus, $f(0) = 1$. On a donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

> Etudions les limites du taux d'accroissement de f en 0 à gauche et à droite de 0.
> **Limite à gauche de 0**
> Pour $x < 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. (On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, cf cours). Donc $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Ainsi f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$.
> **Limite à droite de 0**
> Pour $x > 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 + x - 1}{x - 0} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Ainsi f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.
> On a alors $f'_g(0) = f'_d(0)$. La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes, déterminer leur domaine de définition, justifier leur dérivabilité et calculer leur dérivée.

1. $f_1(x) = \sin\left(\dfrac{3x - 5}{2x + 7}\right)$

> La fonction $x \mapsto 3x-5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto 2x+7$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $-\dfrac{7}{2}$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{3x - 5}{2x + 7}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{7}{2}\}$. De plus, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est

> définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonctions, la fonction f_1 est $\boxed{\text{définie et dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{2}\}}$.
> On a alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{2}\}$,
>
> $$f_1'(x) = \frac{3(2x+7) - (3x-5) \times 2}{(2x+7)^2} \times \cos\left(\frac{3x-5}{2x+7}\right) = \frac{31}{(2x+7)^2} \times \cos\left(\frac{3x-5}{2x+7}\right).$$

2. $f_2(x) = x^2 \ln(3x^2+2)$

> La fonction $x \mapsto 3x^2+2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+2 > 0$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln(3x^2+2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi par produit la fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
> La fonction f_2 est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(3x^2+2)$. La fonction v est elle-même de la forme $\ln(w)$ avec $w(x) = 3x^2+2$, $w'(x) = 6x$. On a donc $v'(x) = \frac{6x}{3x^2+2}$.
>
> $$f_2'(x) = 2x\ln(3x^2+2) + x^2 \times \frac{6x}{3x^2+2} = 2x\ln(3x^2+2) + \frac{6x^3}{3x^2+2}.$$