Interrogation n° 15

Exercice 1

1. Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + 3y - 2z - t = 0 \right\}.$$

2. En déterminer une base.

Exercice 2

Après avoir déterminé le domaine de définition et étudié la dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur fonction dérivée :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.
2. $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$

Corrigé : Interrogation n° 15

Exercice 1

1. Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + 3y - 2z - t = 0 \right\}.$$

- On a clairement $F \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0 + 3 \times 0 - 2 \times 0 - 0 = 0$ donc $F \neq \emptyset$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \in F$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \in F$, montrons que $\lambda X_1 + X_2 \in F$. On a :

$$\lambda X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda t_1 + t_2 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + x_2) + 3(\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) - (\lambda t_1 + t_2) &= \lambda(x_1 + 3y_1 - 2z_1 - t_1) + x_2 + 3y_2 - 2z_2 - t_2 \\ &= \lambda \times 0 + 0 \quad \text{car } (X_1, X_2) \in F^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

  On a donc $\lambda X_1 + X_2 \in F$

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

2. En déterminer une base.

Commençons par déterminer une famille génératrice de F. On a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid t = x + 3y - 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x + 3y - 2z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid t = x + 3y - 2z \right\}.$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ -2z \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3).$$

La famille est (e_1, e_2, e_3) est donc une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre et (e_1, e_2, e_3) est donc une base de F.

Exercice 2

Après avoir déterminé le domaine de définition et étudié la dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur fonction dérivée :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut commencer par déterminer le signe de $\frac{1-x}{1+x}$ pour déterminer le domaine de définition de f. Dressons le tableau de signe de ce quotient :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{1-x}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On déduit $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$.
Les fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto 1+x$ sont dérivables sur $]-1,1[$ et $x \mapsto 1+x$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Ainsi le quotient $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$). La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est dérivable sur $]-1,1[$ par composition.
Remarquons que pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x).$$

On a alors $\forall x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}.$$

2. $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $\arctan$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par quotient la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \times (x^2+1) - \arctan(x) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - 2x\arctan(x)}{(x^2+1)^2}.$$