

Interrogation n° 14

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Citer 5 espaces vectoriels de référence.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.
3. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E .
4. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , compléter :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \{ \dots \}$$

5. Donner la définition d'une famille libre.
6. Donner la définition d'une famille génératrice.

Exercice 2 *Questions de cours*

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en x_0 .
2. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .
3. Soit f une fonction définie sur I . Donner la définition de f de classe $\mathcal{C}^1(I)$.
4. Énoncer le théorème de prolongement de la dérivée.

Corrigé : Interrogation n° 14

Exercice 1 Questions de cours

1. Citer 5 espaces vectoriels de référence.

On peut, par exemple, citer : pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F(I, \mathbb{R})$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

3. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E .

Il faut que $F \subset E$, $F \neq \emptyset$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$.

4. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , compléter :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \{ \dots \}$$

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

5. Donner la définition d'une famille libre.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0)$$

6. Donner la définition d'une famille génératrice.

Soit E un espace vectoriel, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E si pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

Exercice 2 Questions de cours

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$, donner la définition de la dérivabilité de f en x_0 .

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse x_0 . L'équation de cette tangente est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Soit f une fonction définie sur I . Donner la définition de f de classe $\mathcal{C}^1(I)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ (ou plus simplement $\mathcal{C}^1(I)$), si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .

4. Énoncer le théorème de prolongement de la dérivée.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.