Interrogation n° 14

Exercice 1

On considère l'espace suivant : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ \middle|\ x - 2y - z = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire, une base de F.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u = (0, 1, 1), \quad v = (2, 0, -1), \quad w = (2, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées du vecteur $t = (4, -1, 1)$?

Corrigé : Interrogation n° 14

Exercice 1

On considère l'espace suivant : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ \middle| \ x - 2y - z = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

> On applique le Corollaire 18.1 pour montrer que F est (ou non) un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
> - On a clairement $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
> - $0 - 2 \times 0 - 0 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. Ainsi $F \neq \emptyset$.
> - Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
>
> $$\lambda X + \tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda x + \tilde{x} \\ \lambda y + \tilde{y} \\ \lambda z + \tilde{z} \end{pmatrix}.$$
>
> De plus,
>
> $$\begin{aligned} (\lambda x + \tilde{x}) - 2(\lambda y + \tilde{y}) - (\lambda z + \tilde{z}) &= \lambda(x - 2y - z) + (\tilde{x} - 2\tilde{y} - \tilde{z}) \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0 \quad \text{car } X, \tilde{X} \in F. \end{aligned}$$
>
> Ainsi $\lambda X + \tilde{X} \in F$
>
> Nous venons donc de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

> On peut modifier l'écriture de l'espace F :
>
> $$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ \middle| \ x - 2y - z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ \middle| \ x = 2y + z \right\}$$
>
> $$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
>
> Ainsi :
>
> $$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$
>
> La famille (v_1, v_2) est donc une famille génératrice de F.

3. En déduire, une base de F.

> La famille (v_1, v_2) est génératrice de F, montrons que la famille (v_1, v_2) est libre. Elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
> En conclusion, la famille (v_1, v_2) est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u = (0, 1, 1), \quad v = (2, 0, -1), \quad w = (2, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

> Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$. On obtient alors le système suivant :
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
> On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient le système équivalent suivant :
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$
> Le système est maintenant échelonné, on le résout et on obtient : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc $\boxed{\text{libre}}$.
> Montrons que cette famille est génératrice. Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = x$. On obtient alors le système suivant :
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x_1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x_2 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_3 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x_1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x_2 \end{array}\right.$$
> On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient le système équivalent suivant :
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_3 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x_1 \\ & & \lambda_2 & & & = & x_2 - x_3 \end{array}\right.$$
> Le système est maintenant échelonné, on le résout et on obtient : $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 - x_3$, $\lambda_2 = x_2 - x_3$ et $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3$. Le système possède une solution donc la famille est bien $\boxed{\text{génératrice}}$.

2. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées du vecteur $t = (4, -1, 1)$?

> En reprenant les calculs menés précédemment avec $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 1$, on obtient :
> $$t = -5u - 2v + 4w.$$
> Les coordonnées du vecteur t dans cette base sont donc $\boxed{(-5, -2, 4)}$.