Interrogation n° 14

Exercice 1

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Corrigé : Interrogation n° 14

Exercice 1

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

> Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
> Commençons par montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
> Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Ceci équivaut au système :
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
>
> $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
>
> On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre.
>
> Montrons que la famille est génératrice. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = ae_1 + be_2 + ce_3$. Ceci équivaut au système :
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ & & b & + & c & = & z \end{array} \right.$$
>
> $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ & & & & c & = & y - x \\ & & b & + & c & = & z \end{array} \right.$$
>
> $L_3 \leftrightarrow L_2$
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ & & b & + & c & = & z \\ & & & & c & = & y - x \end{array} \right.$$
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & x - b \\ b & = & z - c \\ c & = & y - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & x - (z - y + x) \\ b & = & z - y + x \\ c & = & y - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & y - z \\ b & = & z - y + x \\ c & = & y - x \end{array} \right.$$
>
> La famille $\mathcal{B}$ est bien génératrice. Comme elle est également libre, on en déduit que c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

> On peut utiliser les calculs menés à la question précédente car ici on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$ae_1 + be_2 + ce_3$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcr} a & = & 2-3=-1 \\ b & = & 3-2-7=-6 \\ c & = & 2-(-7)=9 \end{array}\right.$$

Les coordonnées de X dans cette base sont donc $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.